

1 ベクトル空間

まず、**実数体**は、次数のなす集合 \mathbb{R} と加法 $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 、乗法 $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ で定義された写像からなる三組 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ である。加法と乗法を満たす性質を思い出す。

(A1) 任意の $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対して、 $(a + b) + c = a + (b + c)$ である。

(A2) 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して、 $a + 0 = a = 0 + a$ を満たす元 $0 \in \mathbb{R}$ が存在する。

(A3) 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して、 $a + b = 0 = b + a$ を満たす元 $b \in \mathbb{R}$ が存在する。

(A4) 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して、 $a + b = b + a$ である。

(P1) 任意の $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対して、 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ である。

(P2) 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して、 $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$ を満たす 0 でない元 $1 \in \mathbb{R}$ が存在する。

(P3) 任意の 0 でない $a \in \mathbb{R}$ に対して、 $a \cdot b = 1 = b \cdot a$ を満たす元 $b \in \mathbb{R}$ が存在する。

(P4) 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して、 $a \cdot b = b \cdot a$ である。

(D) 任意の $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対して、 $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ と $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ である。

注 1. 一般的に、集合 K と以上の公理 (A1)–(A4)、(P1)–(P4)、(D) を満たす写像

$$+: K \times K \rightarrow K, \quad \cdot: K \times K \rightarrow K$$

からなる三組 $(K, +, \cdot)$ とは、**体 (field)** と呼ばれる。例として、集合 $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ と次のように定義された写像 $+: \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2$ 、 $\cdot: \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2$ からなる三組 $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$ も体である。

$$\begin{array}{cccc} 0 + 0 = 0 & 0 + 1 = 1 & 1 + 0 = 1 & 1 + 1 = 0 \\ 0 \cdot 0 = 0 & 0 \cdot 1 = 0 & 1 \cdot 0 = 0 & 1 \cdot 1 = 1 \end{array}$$

体 $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$ は、位数 2 の**有限体**とよばれ、数学や情報理論での大切なものである。

定義 2. 集合 V と次の公理 (A1)–(A4) と (M1)–(M4) を満たす写像

$$+: V \times V \rightarrow V, \quad \cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$$

からなる三組 $(V, +, \cdot)$ とは、**ベクトル空間 (vector space)** と呼ばれる。

- (A1) 任意の $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対して、 $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ である。
- (A2) 任意の $\mathbf{u} \in V$ に対して、 $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u} = \mathbf{0} + \mathbf{u}$ を満たす元 $\mathbf{0} \in V$ が存在する。
- (A3) 任意の $\mathbf{u} \in V$ に対して、 $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ を満たす元 $\mathbf{v} \in V$ が存在する。
- (A4) 任意の $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ に対して、 $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ である。
- (M1) 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ 、 $\mathbf{u} \in V$ に対して、 $(a \cdot b) \cdot \mathbf{u} = a \cdot (b \cdot \mathbf{u})$ である。
- (M2) 任意の $a \in \mathbb{R}$ 、 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ に対して、 $a \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (a \cdot \mathbf{u}) + (a \cdot \mathbf{v})$ である。
- (M3) 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ 、 $\mathbf{u} \in V$ に対して、 $(a + b) \cdot \mathbf{u} = (a \cdot \mathbf{u}) + (b \cdot \mathbf{u})$ である。
- (M4) 任意の $\mathbf{u} \in V$ に対して、 $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$ である。

注 3. ベクトル空間 $(V, +, \cdot)$ について、次の用語が用いられることが多い。

- (i) 集合 V の元は、ベクトルと呼ばれ、太字 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \dots$ で書かれている。
- (ii) 集合 \mathbb{R} の元は、スカラーと呼ばれ、小文字 a, b, c, \dots で書かれている。
- (iii) ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ に対して、ベクトル $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$ は、そのベクトル和と呼ばれる。
- (iv) スカラー $a \in \mathbb{R}$ とベクトル $\mathbf{u} \in V$ に対して、ベクトル $a \cdot \mathbf{u} \in V$ は、そのスカラー積と呼ばれ、単に $a\mathbf{u}$ と書かれている。
- (v) 任意の $\mathbf{u} \in V$ に対して $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u} = \mathbf{0} + \mathbf{u}$ を満たすベクトル $\mathbf{0} \in V$ は、零ベクトルと呼ばれる。
- (vi) ベクトル $\mathbf{u} \in V$ に対して、 $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ を満たすベクトル $\mathbf{v} \in V$ は、ベクトル \mathbf{u} の逆ベクトルと呼ばれ、 $-\mathbf{u}$ と書かれる。
- (vii) ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ のベクトル差は、 $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$ と定義される。特に、任意のベクトル $\mathbf{u} \in V$ に対して、 $\mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{0}$ である。

補題 4. ベクトル空間 $(V, +, \cdot)$ をおいておく。

- (1) 零ベクトルについては、ただ一つが存在する。

(2) 任意のベクトル $\mathbf{u} \in V$ の逆ベクトルについては、ただ一つが存在する。

(3) 任意のベクトル $\mathbf{u} \in V$ に対して、 $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$ である。

(4) 任意のベクトル $\mathbf{u} \in V$ に対して、 $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$ である。

証明. (1) ベクトル $\mathbf{0}, \mathbf{0}' \in V$ は、両方公理 (A2) を満たすとき、 $\mathbf{0} = \mathbf{0}'$ であることを示せばよい。ベクトル $\mathbf{0}$ は公理 (A2) を満たすので、 $\mathbf{0}' = \mathbf{0}' + \mathbf{0}$ であることが分かる。同様に、ベクトル $\mathbf{0}'$ は公理 (A2) を満たすので、 $\mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ であることが分かる。すなわち、

$$\mathbf{0}' = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}$$

を示した。

(2) ベクトル $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$ は、両方与えられたベクトル $\mathbf{u} \in V$ の逆ベクトルであることを仮定する。そのとき、

$$\mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v} + (\mathbf{u} + \mathbf{v}') = (\mathbf{v} + \mathbf{u}) + \mathbf{v}' = \mathbf{0} + \mathbf{v}' = \mathbf{v}'$$

が成り立つので、ベクトル \mathbf{u} の逆ベクトルの一意性を示した。

(3) ベクトル $\mathbf{u} \in V$ をおいておく。それについて、

$$0\mathbf{u} = (0 + 0)\mathbf{u} = 0\mathbf{u} + 0\mathbf{u}$$

なので、 $\mathbf{0} = 0\mathbf{u}$ が得る。

(4) ベクトル \mathbf{u} をおいておく。

$$\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = 1\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = (1 - 1)\mathbf{u} = 0\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

なので、ベクトル $(-1)\mathbf{u}$ はベクトル \mathbf{u} の逆ベクトルであることが分かる。 □

例 5 (ユークリッド空間). 次のように定義されたベクトル空間 $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ は、 n 次の **ユークリッド空間** と呼ばれる。集合 \mathbb{R}^n は、 n 次の列ベクトル

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

のなす集合であり、ベクトル和 $+: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ とスカラー積 $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ は、次の公式で定義された写像である。

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}, \quad a \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au_1 \\ au_2 \\ \vdots \\ au_n \end{pmatrix}$$

例 6 (関数空間). 集合 V を任意の関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ からなる集合とし、ベクトル和とスカラー積を、それぞれの公式 $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ と $(af)(x) = af(x)$ で定めると、 $(V, +, \cdot)$ はベクトル空間である。このベクトル空間の零ベクトルは、定関数 $f(x) = 0$ である。

命題 7. ベクトル空間 $(V, +, \cdot)$ と次の性質 (i)—(iii) を満たす部分集合 $W \subset V$ をおいておく。

(i) $\mathbf{0} \in W$

(ii) 任意の $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ に対して、 $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$ である。

(iii) 任意の $a \in \mathbb{R}$ 、 $\mathbf{u} \in W$ に対して、 $a\mathbf{u} \in W$ である。

そのとき、 $(W, +, \cdot)$ は、ベクトル空間である。

証明. それぞれの性質 (ii) と (iii) により、 $+: W \times W \rightarrow W$ と $\cdot: \mathbb{R} \times W \rightarrow W$ は、うまく定義された写像である。この写像は、公理 (A1)—(A4)、(M1)—(M4)、(D) を満たすことを示す。写像 $+: V \times V \rightarrow V$ と $\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ が、その公理を満たすので、公理 (A2) と (A3) 以外の公理が成り立つ。公理 (A2) について、写像 $+: V \times V \rightarrow V$ が (A2) を満たすので、 V が、任意の $\mathbf{u} \in W$ に対して、 $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u} = \mathbf{0} + \mathbf{u}$ を満たす元 $\mathbf{0}$ を含む。しかし、仮定 (i) より、 $\mathbf{0} \in W$ なので、 $+: W \times W \rightarrow W$ も公理 (A2) を満たすことが分かる。最後に、写像 $+: V \times V \rightarrow V$ が公理 (A3) を満たすので、任意の $\mathbf{u} \in W$ に対して、 V が、 $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ を満たす元 \mathbf{v} を含む。しかし、補題 4 その (4) より、 $\mathbf{v} = (-1) \cdot \mathbf{u}$ なので、仮定 (iii) より、 $\mathbf{v} \in W$ であることが分かる。よって、 $+: W \times W \rightarrow W$ も公理 (A3) を満たす。 \square

定義 8. ベクトル空間 $(V, +, \cdot)$ と以上の性質 (i)—(iii) を満たす部分集合 $W \subset V$ からなるベクトル空間 $(W, +, \cdot)$ は、与えられたベクトル空間 $(V, +, \cdot)$ の **部分空間** とよばれる。

命題 9. $m \times n$ 行列 A に対して、解集合

$$W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^n$$

については、 $(W, +, \cdot)$ はユークリッド空間 $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ の部分空間である。

証明. 部分集合 $W \subset \mathbb{R}^n$ が命題 7 の性質 (i)—(iii) を満たすことを示す。まず、 $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ なので、性質 (i) が成り立つ。続いて、 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ のとき、 $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ なので、性質 (ii) が得る。最後に、 $a \in \mathbb{R}$ 、 $\mathbf{u} \in W$ のとき、 $A(a\mathbf{u}) = aA\mathbf{u} = a\mathbf{0} = \mathbf{0}$ なので、性質 (iii) も得る。命題 7 より、 $(W, +, \cdot)$ は、 $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ の部分空間であることが分かる。□

定義 10. $m \times n$ 行列 A と解集合 $W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^n$ において、 n 次のユークリッド空間 $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ の部分空間 $(W, +, \cdot)$ は、 A のカーネル (kernel) と呼ばれ、 $\ker(A)$ と書かれる。

例 11. (1) 次の部分集合 $W \subset \mathbb{R}^2$ について、 $(W, +, \cdot)$ は $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ の部分空間である。

$$W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 - 3x_2 = 0\}$$

ただし、 $(W, +, \cdot)$ は 1×2 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix}$ のカーネルである。

(2) 次の部分集合 $Z \subset \mathbb{R}^2$ は、ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ の部分空間ではない。

$$Z = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 - 3x_2 = 1\}$$

なぜなら、 Z は、零ベクトル $\mathbf{0}$ を含まない。