

11 対称行列と直交行列

内積空間 $(\mathbb{R}^n, \langle -, - \rangle)$ において、次の性質を満たすような部分集合 $S = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ は、**正規直交**であると呼ばれる。

$$\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

例として、基本基底 $S = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ が、正規直交である。

定義 1. (i) ${}^t A = A$ を満たす正方行列 A は、**対称行列**と呼ばれる。

(ii) n 次の正方行列 P において、 P の列ベクトルからなる部分集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ は正規直交であるとき、 P が**直交行列**と呼ばれる。

例 2. (1) 単位行列 E_n は、 n 次の対称行列である。

(2) 単位行列 E_n は、 n 次の直交行列である。なせなら、 E_n の列ベクトルからなる部分集合は、基本基底 $S = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ と等しい、正規直交である。

(3) 任意の 2 次の対称行列 A は、次のように表される。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

(4) 任意の 2 次の直交行列 P は、次のように表される。

$$P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad P = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

補題 3. n 次の正方行列 A に対して、次の性質 (i)–(ii) は、同値である。

(i) A は対称行列である。

(ii) 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して、 $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle$ である。

証明. まず、(i) を仮定し、(ii) を示す。一般的に、 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ の内積が、次のように行列積で表される。

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = {}^t \mathbf{u} \mathbf{v}$$

特に、

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = {}^t(A\mathbf{x})\mathbf{y} = {}^t\mathbf{x} {}^tA\mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, {}^tA\mathbf{y} \rangle$$

である。

逆に、(ii) を仮定し、(i) を示す。仮定より、特に、

$$a_{ij} = \langle \mathbf{e}_i, A\mathbf{e}_j \rangle = \langle A\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = a_{ji}$$

が分かる。よって、 A は対称行列であることが成り立つ。 $\square$

命題 4. A を n 次の対称行列、 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ を A の互いに異なる固有値、 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ をそれらに属する固有ベクトルとする。そのとき、任意の $1 \leq i < j \leq k$ に対して、

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$$

である。

証明. 補題 3 を用いて、

$$\lambda_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \langle \lambda_i \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \langle A\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \langle \mathbf{v}_i, A\mathbf{v}_j \rangle = \langle \mathbf{v}_i, \lambda_j \mathbf{v}_j \rangle = \lambda_j \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle$$

が分かる。仮定より、 $\lambda_i \neq \lambda_j$ なので、 $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$ が成り立つ。 $\square$

例 5. 次の対称行列 A を考えてみる。

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

以下、 A の固有値と固有ベクトルを計算する。

A の固有多項式は、

$$\begin{aligned} \chi_A(t) &= \det(A - tE) = \det \begin{pmatrix} 9-t & -2 \\ -2 & 6-t \end{pmatrix} = (9-t)(6-t) - 4 \\ &= t^2 - 15t + 50 = (t-5)(t-10) \end{aligned}$$

であるため、 A の固有値は、 $\lambda_1 = 5$ と $\lambda_2 = 10$ である。 λ_i に属する固有ベクトル $\mathbf{v}_i$ は、連立 1 次方程式 $(A - \lambda_i E)\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ を満たすゼロでないベクトル $\mathbf{v}_i$ である。計算すると、

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を得る。(任意の $\mathbf{v}_i$ のゼロでないスカラー倍も、 λ_i に属する固有ベクトルである。) 特に、

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 0$$

である。

補題 6. n 次の正方行列 P に対して、次の性質 (i)–(iv) は同値である。

(i) P は直交行列である。

(ii) 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して、 $\|P\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ である。

(iii) 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して、 $\langle P\mathbf{x}, P\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ である。

(iv) $({}^tP)P = E_n$ である。

証明. P の第 j 列を $\mathbf{p}_j$ とすると、

$$\langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j \rangle = ({}^tP)P \text{ の } (i, j) \text{ 成分}$$

であるため、 $S = \{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ が正規直交であることと $({}^tP)P = E_n$ であることは同値である。すなわち、(i) と (iv) は同値である。

任意の $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2$$

ため、

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{2} (\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2)$$

が分かる。よって、(ii) と (iii) は同値であることが成り立つ。

次に、(iii) ならば (i) を示す。(iii) を仮定すると、

$$\langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j \rangle = \langle P\mathbf{e}_i, P\mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle$$

を得る。よって、(i) が成り立つ。

最後に、(i) ならば (ii) を示す。任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$P\mathbf{x} = \mathbf{p}_1x_1 + \dots + \mathbf{p}_nx_n$$

である。よって、(i) を仮定すると、

$$\|P\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{p}_1x_1 + \cdots + \mathbf{p}_nx_n, \mathbf{p}_1x_1 + \cdots + \mathbf{p}_nx_n \rangle = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = \|\mathbf{x}\|^2$$

を得るため、(ii) が成り立つ。 $\square$

注 7. 補題 6 の性質 (iv) は、次の性質 (iv') と同値である。

(iv') P が可逆で、 $P^{-1} = {}^tP$ である。

例 8. 補題 6 より、 n 次の正方行列 P に対して、 P が直交行列であることと tP が直交行列であることは同値である。なせなら、

$$P \text{ が直交行列} \Leftrightarrow ({}^tP)P = E_n \Leftrightarrow P^{-1} = {}^tP \Leftrightarrow P({}^tP) = E_n \Leftrightarrow {}^tP \text{ が直交行列}$$

命題 9. 任意の直交行列 P に対して、次の性質 (i)–(ii) が成り立つ。

(i) $|\det(P)| = 1$ である。

(ii) 任意の P の固有値 λ に対して、 $|\lambda| = 1$ である。

証明. (i) $({}^tP)P = E$ であるため、 $\det(P)^2 = \det(({}^tP)P) = \det(E) = 1$ が分かる。

(ii) $\mathbf{v}$ を、固有値 λ に属する固有ベクトルとすると、

$$\lambda^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \langle \lambda \mathbf{v}, \lambda \mathbf{v} \rangle = \langle P\mathbf{v}, P\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$$

を得る。 $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ため、 $\lambda^2 = 1$ が分かる。 $\square$

例 10. P を n 次の直交行列とする。以下、 $\det(P) = -1$ のとき、 $\lambda = -1$ が P の固有値であることを示す。

授業 9 の定理 7 より、 $\det(P + E) = 0$ を示せばよい。 P は直交行列であるため、

$$({}^tP)(P + E) = ({}^tP)P + ({}^tP)E = E + {}^tP = {}^tE + {}^tP = {}^t(E + P) = {}^t(P + E)$$

が分かる。よって、

$$\begin{aligned} \det(P + E) &= \det({}^t(P + E)) = \det({}^tP(P + E)) \\ &= \det({}^tP) \det(P + E) = \det(P) \det(P + E) = -\det(P + E) \end{aligned}$$

を得る。ゆーに、 $\det(P + E) = 0$ が成り立つ。