2　1 次結合と 1 次独立

これから、ベクトル空間 $(V, +, \cdot)$ を単に V と書く。

定義 **1.** ベクトル空間 V のベクトル $\mathbf{v}$ が V の有限個のベクトル $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ を用いて

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n \qquad (c_i \in \mathbb{R})$$

と書かれるとき、ベクトル $\mathbf{v}$ は $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ の 1 次結合で書かれるという。

注 2. 零個のベクトルの 1 次結合が、零ベクトルとなることを定義する。

例 3. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ のベクトル

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

をおいておく。このとき、任意のベクトル $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ は、$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ の 1 次結合と表される。確かに、

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (-v_1 + v_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-2v_1 + v_2)\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-v_1 + v_2)\mathbf{u}_1 + (-2v_1 + v_2)\mathbf{u}_2$$

である。

続いて、ベクトル空間 V の部分集合 $S \subset V$ を考える。

命題 **4.** ベクトル空間 V とその部分集合 $S \subset V$ をおいておく。部分集合 $S \subset V$ に含まれているベクトルの 1 次結合からなる部分集合

$$W = \{c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n \mid n \geqslant 0;\ \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in S;\ c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}\} \subset V$$

は、ベクトル空間 V の部分空間である。

証明. 前回証明した命題 7 の性質 (i)—(iii) を示せばよい。まず、零ベクトル $\mathbf{0} \in W$ なので、性質 (i) が成り立つ。続いて、

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_m\mathbf{u}_m & \qquad (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m \in S;\ c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}) \\ \mathbf{v} &= d_1\mathbf{v}_1 + \cdots + d_n\mathbf{v}_n & \qquad (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in S;\ d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

が W に含まれているベクトルのとき、ベクトル和

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=c_1\mathbf{u}_1+\cdots+c_m\mathbf{u}_m+d_1\mathbf{v}_1+\cdots+d_n\mathbf{v}_n$$

も W に含まれているベクトルであるので、性質 (ii) が成り立つ。最後に、

$$\mathbf{u}=c_1\mathbf{u}_1+\cdots+c_m\mathbf{u}_m \qquad (\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_m\in S;\ c_1,\ldots,c_m\in\mathbb{R})$$

が W に含まれているベクトルのと $a\in\mathbb{R}$ がスカラーのとき、スカラー積

$$a\mathbf{u}=ac_1\mathbf{u}_1+\cdots+ac_m\mathbf{u}_m$$

も W に含まれているベクトルなので、性質 (iii) も成り立つ。前回示した命題 7 より、$W\subset V$ は部分空間であることが成り立つ。 □

定義 **5.** ベクトル空間 V をおいておく。部分集合 $S\subset V$ に関して、部分空間

$$W=\{c_1\mathbf{u}_1+\cdots+c_n\mathbf{u}_n \mid n\geqslant 0;\ \mathbf{u}_1+\cdots+\mathbf{u}_n\in S;\ c_1,\ldots,c_n\in\mathbb{R}\}\subset V$$

は、S で生成された部分空間と呼ばれる。

例 6. 例 3 に於けるベクトル $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\in\mathbb{R}^2$ のなす部分集合 $S=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\}\subset\mathbb{R}^2$ は、全空間 $W=\mathbb{R}^2$ を生成する。

定義 **7.** ベクトル空間 V をおいておく。

(1) 次の性質を満たす部分集合 $S\subset V$ は、1 次独立であると呼ばれる。
「任意の $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n\in S$ と $c_1,c_2\ldots,c_n\in\mathbb{R}$ に対して、

$$c_1\mathbf{u}_1+c_2\mathbf{u}_2+\cdots+c_n\mathbf{u}_n=\mathbf{0}$$

なら、必ず $c_1=0,c_2=0,\ldots,c_n=0$ である。」

(2) 1 次独立でない部分集合 $S\subset V$ は、1 次従属であると呼ばれる。

例 8. (1) 空集合 $\emptyset\subset V$ は 1 次独立である。

(2) 零ベクトルからなる部分集合 $\{\mathbf{0}\}\subset V$ は 1 次従属である。確かに、$c\mathbf{0}=\mathbf{0}$ から必ずしも $c=0$ が成り立たない。例として、$1\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}$ なのに、$1=0$ ではない。

(3) ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の基本ベクトル

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad , \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

のなす部分集合 $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ は 1 次独立である。なぜなら、

$$c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + \cdots + c_n\mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

は零ベクトルなら、必ず $c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_n = 0$ である。

(4) 例 3 に於けるベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ からなる部分集合 $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \subset \mathbb{R}^2$ は 1 次独立である。確かに、方程式 $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$ と連立 1 次方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

は同値なので、$c_1 = 0, c_2 = 0$ であることが簡単に得る。

命題 **9.** ベクトル空間 V において、$S = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\} \subset V$ を k 個のベクトルからなる 1 次独立である部分集合とし、$W \subset V$ を h 個のベクトルからなる部分集合 $T = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_h\} \subset V$ で生成された部分空間とする。このとき、$S \subset W$ なら、必ず $k \leqslant h$ である。

証明. 帰納法を用いて証明する。まず、$h = 0$ のとき、$W = \{\mathbf{0}\} \subset V$ なので、例 8 その (2) から、$k = 0$ が得る。よって、$h-1$ のときを正しいと仮定し、h のときを示せばよい。定義 5 より、部分集合 $S \subset W$ からなるベクトル $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ が、次のように表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{12}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{1h}\mathbf{v}_h \\ \mathbf{u}_2 &= a_{21}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{2h}\mathbf{v}_h \\ &\vdots \\ \mathbf{u}_k &= a_{k1}\mathbf{v}_1 + a_{k2}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{kh}\mathbf{v}_h \end{aligned}$$

まず、$a_{1h}=0, a_{2h}=0, \ldots, a_{kh}=0$ だと、S は、部分集合 $T'=\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{h-1}\}\subset V$ で生成された部分空間 $W'\subset V$ の部分集合となることが分かる。帰納法の仮定に従って、$k\leqslant h-1$ が成り立つ。特に、このとき $k\leqslant h$ が得る。続いて、$a_{1h}, a_{2h}, \ldots, a_{kh}$ のいずれかはゼロでないときを考える。例として、$a_{1h}\neq 0$ のとき、次のように定める $k-1$ 個のベクトル $\mathbf{u}'_2,\ldots,\mathbf{u}'_k$ からなる部分集合 $S'\subset V$ は、以上の部分空間 $W'\subset V$ に含まれている。

$$\begin{aligned}\mathbf{u}'_2 &= \mathbf{u}_2-\frac{a_{2h}}{a_{1h}}\mathbf{u}_1\\ &\vdots\\ \mathbf{u}'_k &= \mathbf{u}_k-\frac{a_{kh}}{a_{1h}}\mathbf{u}_1\end{aligned}$$

今、部分集合 $S'\subset V$ は 1 次独立であることを示す。連立 1 次方程式

$$c_2\mathbf{u}'_2+\cdots+c_k\mathbf{u}'_k=\mathbf{0}$$

と連立 1 次方程式

$$\frac{-1}{a_{1h}}(c_2a_{2h}+\cdots+c_ka_{kh})\mathbf{u}_1+c_2\mathbf{u}_2+\cdots+c_k\mathbf{u}_k=\mathbf{0}$$

が同値なので、$S=\{\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k\}\subset V$ が 1 次独立である仮定より、$c_2=0,\ldots,c_k=0$ であることが分かる。すなわち、$S'=\{\mathbf{u}'_2,\ldots,\mathbf{u}'_k\}\subset V$ は 1 次独立であることが得る。$S'\subset W'$ なので、帰納法の仮定より、$k-1\leqslant h-1$ が成り立つ。これで、命題を示した。 □

例 10. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ は 2 個のベクトルのなす部分集合で生成されるので、命題 9 より、3 個以上のベクトルからなる部分集合 $S\subset\mathbb{R}^3$ は必ず 1 次従属であることが分かる。