3　基底と次元

定義 **1.** ベクトル空間 V において、V が有限個のベクトルからなる部分集合 $T \subset V$ で生成されるとき、V は有限次元ベクトル空間と呼ばれる。

例 2. (1) ゼロ空間 $\{\mathbf{0}\}$ はゼロ個のベクトルからなる空集合 $\emptyset \subset \{\mathbf{0}\}$ で生成されるので、有限次元であることが得られる。

(2) ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は、基本ベクトルからなる部分集合 $S = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ で生成されるので、有限次元であることが分かる。

命題 **3.** ベクトル空間 V とその部分空間 $W \subset V$ に対して、V は有限次元なら、W も有限次元である。

証明. V は有限次元なので、有限個ベクトルからなる部分集合 $T = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_h\} \subset V$ で生成される。有限次元でない部分空間 $W \subset V$ に関して、任意の $k \geqslant 0$ に対して、k 個のベクトルからなる 1 次独立である部分集合 $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\} \subset W$ が存在する。しかし、前回証明した命題 9 より、V は h 個以上のベクトルからなる 1 次独立である部分集合を持たないことが分かるので、有限次元でない部分空間 $W \subset V$ が存在しないことが成り立つ。

以下、帰納法を用いて、任意の $k \geqslant 0$ に対して、k 個のベクトルからなる 1 次独立である部分集合 $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\} \subset W$ が存在することを示す。まず、$k = 0$ のときは自明なので、$k = n - 1$ のときを正しいとし、$k = n$ のときを示せばよい。$W' \subset W$ を、$n - 1$ 個のベクトルからなる 1 次独立である部分集合 $S' = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}\}$ で生成された部分空間とする。W は有限次元でない仮定より、$W' \neq W$ が分かる。今、任意の $\mathbf{u}_n \in W \setminus W'$ に対して、

$$S = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n\} \subset W$$

は 1 次独立であることを示す。1 次関係

$$c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_{n-1}\mathbf{u}_{n-1} + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

をおいておく。まず、$c_n \neq 0$ のとき、

$$\mathbf{u}_n = -\frac{1}{c_n}(c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}) \in W'$$

が成り立つ。しかし、$\mathbf{u}_n \notin W'$ より、$c_n = 0$ である。$S' \subset W$ は1次独立ため、

$$c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_{n-1}\mathbf{u}_{n-1} = \mathbf{0}$$

から、$c_1 = 0, \ldots, c_{n-1} = 0$ も分かる。よって、$S \subset W$ は1次独立であることを示した。 □

例 4. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は有限次元なので、命題 **??** より、任意の部分空間 $W \subset \mathbb{R}^n$ も有限次元であることが分かる。

有限次元ベクトル空間 V をおいておく。部分集合 $S = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\} \subset V$ は、V を生成するとき、定義より、任意のベクトル $\mathbf{v} \in V$ は、次のような1次結合で表される。

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n \qquad (c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R})$$

一般的に、スカラー $c_1, \ldots, c_n$ は、ベクトル $\mathbf{v}$ で決定されていない。しかし、$S \subset V$ が1次独立であるとき、

$$c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n = d_1\mathbf{u}_1 + \cdots + d_n\mathbf{u}_n$$

から、

$$(c_1 - d_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (c_n - d_n)\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

が得られるので、$c_1 = d_1, \ldots, c_n = d_n$ が分かる。よって、S が1次独立であるとき、スカラー $c_1, \ldots, c_n$ は、ベクトル $\mathbf{v}$ で決定されている。

定義 5. 有限次元ベクトル空間 V をおいておく。

(1) 全空間 V を生成し、1次独立である部分集合 $S = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\} \subset V$ は、基底と呼ばれる。

(2) 基底 $S = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\} \subset V$ と $\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n$ で表されているベクトルにおいて、スカラー $c_1, \ldots, c_n$ は、$\mathbf{v} \in V$ の基底 S に関する座標と呼ばれる。

例 6. (1) ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ に関して、ベクトル

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

のなす部分集合 $S=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}\subset\mathbb{R}^2$ は基底である。なぜなら、任意のベクトル

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$$

が、一意的に $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2$ で表される。基底 $S=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}\subset\mathbb{R}^2$ は、ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の基本基底とよばれ、基本基底に関する座標 $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ は、$\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2$ の基本座標と呼ばれる。

(2) ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ に関して、ベクトル

$$\mathbf{u}_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\quad \mathbf{u}_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$$

のなす部分集合 $T=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\}\subset\mathbb{R}^2$ は基底でもある。なぜなる、任意のベクトル

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$$

が、一意的に $\mathbf{x}=(-x_1+x_2)\mathbf{u}_1+(-2x_1+x_2)\mathbf{u}_2$ で表される。よって、ベクトル $\mathbf{x}$ の基底 T に関する座標は $c_1=-x_1+x_2$ と $c_2=-2x_1+x_2$ を得る。

定理 **7.** 有限次元ベクトル空間 V をおいておく。

(1) 基底 $S=\{\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n\}\subset V$ が存在する。

(2) 二つの基底 $S=\{\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_m\},T=\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}\subset V$ に対して、必ず $m=n$ である。

証明. (1) V は有限次元なので、有限個のベクトルからなる部分集合 $T=\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_h\}\subset V$ で生成される。

$$S=\{\mathbf{v}_{i_1},\ldots,\mathbf{v}_{i_n}\}\subset T$$

を、T の 1 次独立であるような最大の部分集合とする。S が、V を生成しないことを仮定すると、S に含まれているベクトルの 1 次結合で表さないベクトル $\mathbf{v}_j\in T$ が存在し、$S'=\{\mathbf{v}_{i_1},\ldots,\mathbf{v}_{i_n},\mathbf{v}_j\}$ は 1 次独立である。しかし、それは S の最大性に矛盾するので、S が V を生成することが分かる。よって、S は V の基底であることが成り立つ。

以下、S' は 1 次独立であることを示す。ある 1 次関係

$$c_1\mathbf{v}_{i_1}+\cdots+c_n\mathbf{v}_{i_n}+c_{n+1}\mathbf{v}_j=\mathbf{0}$$

に対して、$c_{n+1}=0$ のとき、$\mathbf{v}_j$ が次のような 1 次結合で表される。

$$\mathbf{v}_j = -\frac{1}{c_{n+1}}(c_1\mathbf{v}_{i_1} + \cdots + c_n\mathbf{v}_{i_n})$$

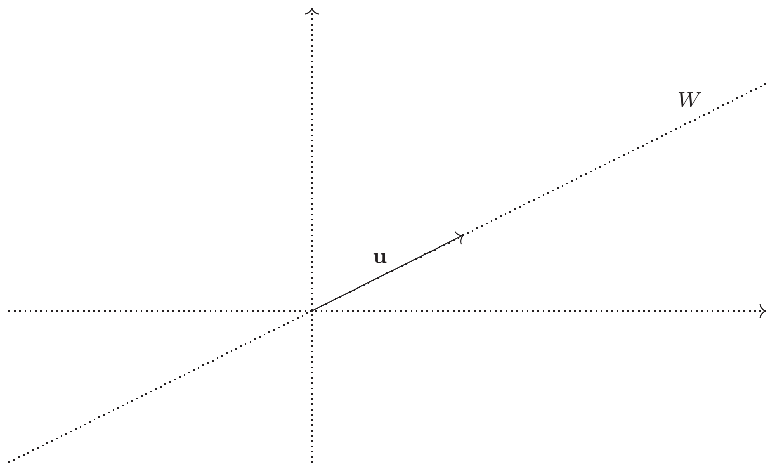
しかし、$\mathbf{v}_j$ が S に含まれているベクトルの 1 次結合で表さないより、$c_{n+1}=0$ が分かる。S は 1 次独立であるため、$c_1=0,\ldots,c_n=0$ も分かる。よって、S' は 1 次独立であることを示した。

(2) 前回証明した命題 9 を用いて、$m \leqslant n$ と $n \leqslant m$ を示す。まず、S は 1 次独立で、T は V を生成するため、$m \leqslant n$ を得る。同様に、T は 1 次独立で、S は V を生成するので、$n \leqslant m$ が分かる。よって、$m=n$ が成り立つ。 $\square$

定義 **8.** 有限次元ベクトル空間 V において、ある基底 $S=\{\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n\}\subset V$ の位数 n は、V の次元と呼ばれ、$\dim(V)=n$ と書かれる。

例 9. (1) ゼロ空間 $\{\mathbf{0}\}$ に関して、空集合 $\emptyset\subset\{\mathbf{0}\}$ は基底であるので、$\dim(\{\mathbf{0}\})=0$ である。

(2) ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ に関して、一つのゼロでないベクトル $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^2$ からなる部分集合 $S=\{\mathbf{u}\}\subset\mathbb{R}^2$ は、1 次独立で、部分空間 $W=\{c\mathbf{u}\mid c\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^2$ の基底となる。



よって、ベクトル空間 W に関して、$\dim(W)=1$ である。

(3) ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ に関して、基本基底 $S=\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}\subset\mathbb{R}^n$ は、位数が n なので、$\dim(\mathbb{R}^n)=n$ である。