4 部分空間と次元

ベクトル空間の基底について、次のより正確な定理を証明する。

定理 1. V を有限次元ベクトル空間、$S \subset V$ を 1 次独立である部分集合、$S \subset T \subset V$ を V を生成する部分集合とする。そのとき、V は $S \subset B \subset T$ を満たす基底 B を持つ。

証明. B を、$S \subset B \subset T$ を満たし 1 次独立であるような最大の部分集合とし、$W \subset V$ を B で生成される部分空間とする。このとき、$W = V$ であることを示せばよい。$W \neq V$ を仮定すると、W に含まれていないベクトル $\mathbf{v} \in T$ が存在し、$B' = B \cup \{\mathbf{v}\} \subset V$ は 1 次独立である。しかし、これは B の最大性に矛盾するので、$W = V$ であることが分かる。

以下、B' は 1 次独立であることを示す。まず、ベクトル空間 V は有限個のベクトルからなる部分集合で生成されるので、授業 2 の命題 9 より、B も有限個のベクトルからなることが分かる。ここで、$B = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ とおくと、B' は、$B' = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}\}$ と表される。さて、ある 1 次関係

$$c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n + c\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

に対して、$c \neq 0$ のとき、

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{c}(c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n) \in W$$

が成り立つ。しかし $\mathbf{v} \notin W$ より、$c = 0$ である。B は 1 次独立であるため、$c_1 = 0, \ldots, c_n = 0$ も分かる。よって、B' は 1 次独立であることが示された。 □

系 2. 有限次元ベクトル空間 V をおいておく。

(i) V を生成する部分集合 $T = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_h\} \subset V$ に対して、T が V の基底であることと T の位数 h が $\dim(V)$ と等しいことは同値である。

(ii) 1 次独立である部分集合 $S = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\} \subset V$ に対して、S が V の基底であることと S の位数 k が $\dim(V)$ と等しいことは同値である。

証明. V の次元を $n = \dim(V)$ とする。

(i) $T \subset V$ が基底であるとき、授業 2 の命題 9 より、$h = n$ が成り立つ。$T \subset V$ が基底でないとき、定理 1 より、T に含まれている基底 $B = \{\mathbf{v}_{i_1}, \ldots, \mathbf{v}_{i_n}\} \subset V$ が存在することが分かる。よって、$n < h$ を得る。

(ii) $S \subset V$ が基底であるとき、授業 2 の命題 9 より、$k = n$ が成り立つ。$S \subset V$ が基底でないとき、定理 1 より、S を含む基底 $B \subset V$ が存在することが分かる。よって、$k < n$ を得る。 □

定義 3. ベクトル空間 V とその部分空間 $W_1, W_2 \subset V$ において、部分空間

$$W_1 + W_2 = \{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in V \mid \ \mathbf{w}_1 \in W_1 \text{ かつ } \mathbf{w}_2 \in W_2\} \subset V$$

は、W_1 と W_2 の和と呼ばれる。

注 4. ベクトル空間 V とその部分空間 $W_1, W_2 \subset V$ に対して、練習問題その 4 の問題 1 より、部分集合 $W_1 \cap W_2, W_1 + W_2 \subset V$ は、部分空間である。

命題 5. 有限次元ベクトル空間 V とその部分空間 $W_1, W_2 \subset V$ に対して、

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$$

である。

証明. $W_1, W_2, W_1 \cap W_2$ の次元をそれぞれ m, n, p とし、$W_1 \cap W_2$ の基底 $S = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ をおいておく。定理 1 より、W_1 と W_2 に対して、次のような基底が存在する。

$$S_1 = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{m-p}\} \subset W_1$$
$$S_2 = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{n-p}\} \subset W_2$$

このとき、$T = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{m-p}, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{n-p}\}$ は、$W_1 + W_2$ の基底となるので、

$$\begin{aligned}\dim(W_1 + W_2) &= p + (m - p) + (n - p) = m + n - p \\ &= \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)\end{aligned}$$

が分かる。

以下、T は、$W_1 + W_2$ の基底であることを示す。

まず、T は $W_1 + W_2$ を生成することを示す。任意の $\mathbf{w} \in W$ は、

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \qquad (\mathbf{w}_1 \in W_1, \mathbf{w}_2 \in W_2)$$

と表される。ここで、$\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ は、次のような 1 次結合で表される。

$$\mathbf{w}_1 = a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_p\mathbf{u}_p + b_1\mathbf{x}_1 + \cdots + b_{m-p}\mathbf{x}_{m-p}$$
$$\mathbf{w}_2 = a'_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a'_p\mathbf{u}_p + c_1\mathbf{y}_1 + \cdots + c_{n-p}\mathbf{y}_{n-p}$$

よって、$\mathbf{w}$ は、次のような 1 次結合で表されることが分かる。

$$\mathbf{w} = (a_1 + a'_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (a_p + a'_p)\mathbf{u}_p + b_1\mathbf{x}_1 + \cdots + b_{m-p}\mathbf{x}_{m-p} + c_1\mathbf{y}_1 + \cdots + c_{n-p}\mathbf{y}_{n-p}$$

これで、T は $W_1 + W_2$ を生成することを示した。

つづいて、T は 1 次独立であることを示す。ある 1 次関係

$$a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_p\mathbf{u}_p + b_1\mathbf{x}_1 + \cdots + b_{m-p}\mathbf{x}_{m-p} + c_1\mathbf{y}_1 + \cdots + c_{n-p}\mathbf{y}_{n-p} = \mathbf{0}$$

に対して、

$$\begin{aligned} a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_p\mathbf{u}_p + b_1\mathbf{x}_1 + \cdots + b_{m-p}\mathbf{x}_{m-p} &\in (W_1 \cap W_2) + W_1 = W_1 \\ a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_p\mathbf{u}_p + b_1\mathbf{x}_1 + \cdots + b_{m-p}\mathbf{x}_{m-p} &= -(c_1\mathbf{y}_1 + \cdots + c_{n-p}\mathbf{y}_{n-p}) \in W_2 \end{aligned}$$

であるため、

$$a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_p\mathbf{u}_p + b_1\mathbf{x}_1 + \cdots + b_{m-p}\mathbf{x}_{m-p} \in W_1 \cap W_2$$

が分かる。しかし、S は $W_1 \cap W_2$ の基底であるより、$b_1 = 0, \ldots, b_{m-p} = 0$ が得られる。同様に、$c_1 = 0, \ldots, c_{n-p} = 0$ が示される。よって、

$$a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_p\mathbf{u}_p = \mathbf{0}$$

が成り立つ。S は 1 次独立であるため、$a_1 = 0, \ldots, a_p = 0$ が分かる。これで、T は 1 次独立であることを示した。 □

定義 6. 有限次元 n のベクトル空間 V とその部分空間 $W \subset V$ をおいておく。

(i) $\dim(W) = 1$ のとき、W は V の直前と呼ばれる。

(ii) $\dim(W) = 2$ のとき、W は V の平面と呼ばれる。

(iii) $\dim(W) = n - 1$ のとき、W は V の超平面と呼ばれる。

例 7. V を $\mathbb{R}^3$ とし、$W_1, W_2 \subset V$ を平面とする。このとき、

$$W_1 \subset W_1 + W_2 \subset V$$

であるため、

$$2 \leqslant \dim(W_1 + W_2) \leqslant 3$$

を得る。命題 5 より、

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2) = 4 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

がわかるので、

$$1 \leqslant \dim(W_1 \cap W_2) \leqslant 2$$

が成り立つ。すなわち、$W_1 \cap W_2$ は、V の直前または平面であることが分かる。