

5 線形写像

定義 1. ベクトル空間 U, V において、次の性質を満たす写像 $F: U \rightarrow V$ は、**線形写像**と呼ばれる。

(1) 任意の $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$ に対して、 $F(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = F(\mathbf{u}_1) + F(\mathbf{u}_2)$ である。

(2) 任意の $c \in \mathbb{R}, \mathbf{u} \in U$ に対して、 $F(c\mathbf{u}) = cF(\mathbf{u})$ である。

補題 2. 線形写像 $F: U \rightarrow V$ について、任意のベクトル空間 U に含まれているベクトルの 1 次結合 $c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n$ に対して、

$$F(c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n) = c_1F(\mathbf{u}_1) + \cdots + c_nF(\mathbf{u}_n)$$

である。

証明. 帰納法を用いて示す。まず、 $n = 0$ のとき、

$$F(\mathbf{0}) = F(0 \cdot \mathbf{0}) \stackrel{(2)}{=} 0 \cdot F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

が成り立つ。よって、 $n = k - 1$ を正しいと仮定し、 $n = k$ のときを示せばよい。このとき、

$$\begin{aligned} F(c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_k\mathbf{u}_k) &= F((c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_{k-1}\mathbf{u}_{k-1}) + c_k\mathbf{u}_k) \\ &\stackrel{(1)}{=} F(c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_{k-1}\mathbf{u}_{k-1}) + F(c_k\mathbf{u}_k) \\ &\stackrel{(2)}{=} F(c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_{k-1}\mathbf{u}_{k-1}) + c_kF(\mathbf{u}_k) \\ &= c_1F(\mathbf{u}_1) + \cdots + c_{k-1}F(\mathbf{u}_{k-1}) + c_kF(\mathbf{u}_k) \end{aligned}$$

が分かる。最後の等式は帰納法の仮定から成り立つ。これで、補題を示した。 $\square$

補題 3. 線形写像 $F: U \rightarrow V$ と $G: V \rightarrow W$ に対して、合成写像

$$G \circ F: U \rightarrow W$$

も線形写像である。

証明. 合成写像 $G \circ F$ が、定義 1 の性質 (1)–(2) を満たすことを示す。

$$\begin{aligned} G(F(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)) &= G(F(\mathbf{u}_1) + F(\mathbf{u}_2)) = G(F(\mathbf{u}_1)) + G(F(\mathbf{u}_2)) \\ G(F(c\mathbf{u})) &= G(cF(\mathbf{u})) = cG(F(\mathbf{u})) \end{aligned}$$

ここで、 F が線形写像であるため、左辺の等式が成り立ち、 G が線形写像であるため、右辺の等式が成り立つ。 $\square$

定義 4. 有限次元ベクトル空間 U 、 V 、線形写像 $F: U \rightarrow V$ と基底

$$R = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\} \subset U$$

$$S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\} \subset V$$

をおいておく。このとき、等式

$$F(\mathbf{u}_j) = a_{1j}\mathbf{v}_1 + a_{2j}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{mj}\mathbf{v}_m \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

で決定された $m \times n$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

が、 U の基底 R と V の基底 S に関する $F: U \rightarrow V$ の **表現行列** と呼ばれる。

注 5. U の基底 $R = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ と V の基底 $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ に関する $F: U \rightarrow V$ の表現行列では、第 j 列の成分は、 V の基底 $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ に関する $F(\mathbf{u}_j)$ の座標である。

次の命題により、有限次元 n, m のベクトル空間 U, V に対して、基底 $R \subset U$ と $S \subset V$ が決められたとき、線形写像 $F: U \rightarrow V$ と $m \times n$ 行列が、一対一対応する。

命題 6. U, V を、有限次元ベクトル空間、

$$R = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\} \subset U$$

$$S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\} \subset V$$

を、それぞれの基底、 $F: U \rightarrow V$ を、線形写像、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

を、基底 $R \subset U$ と $S \subset V$ に関する F の表現行列とする。このとき、ベクトル $\mathbf{x} \in U$ とその像 $\mathbf{y} = F(\mathbf{x}) \in V$ を、

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}_1 + \cdots x_n \mathbf{u}_n$$

$$F(\mathbf{x}) = y_1 \mathbf{v}_1 + \cdots y_m \mathbf{v}_m$$

で表すと、

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

である。

証明. 次のような計算は、命題を示す。

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) &= F(x_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + x_n \mathbf{u}_n) \\ &= x_1 F(\mathbf{u}_1) + \cdots + x_n F(\mathbf{u}_n) \\ &= x_1 (a_{11} \mathbf{v}_1 + a_{21} \mathbf{v}_2 + \cdots + a_{m1} \mathbf{v}_m) + \cdots + x_n (a_{1n} \mathbf{v}_1 + a_{2n} \mathbf{v}_2 + \cdots + a_{mn} \mathbf{v}_m) \\ &= (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n) \mathbf{v}_1 + \cdots + (a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n) \mathbf{v}_m \end{aligned}$$

ここでの最初の三つの等式は、それぞれ、基底 R に関する $\mathbf{x}$ の座標の定義、補題 2、基底 R と S に関する F の表現行列の定義から成り立つ。 $\square$

例 7. U を次のベクトル空間とする。

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = z \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

$R \subset U$ を、次のようなベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$ からなる基底とする。

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$F: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ を、次のように定める線形写像とする。

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

このとき、基底 $R \subset U$ と基本基底 $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \subset \mathbb{R}^2$ に関する $F: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ の表現行列は、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

である。なぜなる、

$$F(\mathbf{u}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \mathbf{e}_1 + 1 \cdot \mathbf{e}_2$$

$$F(\mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \mathbf{e}_1 + 1 \cdot \mathbf{e}_2$$

なので、表現行列の定義から成り立つ。

命題 8. U, V, W を、有限次元ベクトル空間、

$$R = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\} \subset U$$

$$S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\} \subset V$$

$$T = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k\} \subset W$$

を、それぞれの基底、 $F: U \rightarrow V$ と $G: V \rightarrow W$ を、線形写像、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{km} \end{pmatrix}$$

を、それぞれ、基底 $R \subset U$ と $S \subset V$ に関する F の表現行列と基底 $S \subset V$ と $T \subset W$ に関する G の表現行列とする。このとき、基底 $R \subset U$ と $T \subset W$ に関する $G \circ F$ の表現行列は、 BA である。

証明. ベクトル $\mathbf{x} \in U$, $\mathbf{y} = F(\mathbf{x}) \in V$, $\mathbf{z} = (G \circ F)(\mathbf{x}) = G(\mathbf{y}) \in W$ を、それぞれ

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + x_n \mathbf{u}_n$$

$$\mathbf{y} = y_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + y_m \mathbf{v}_m$$

$$\mathbf{z} = z_1 \mathbf{w}_1 + \cdots + z_k \mathbf{w}_k$$

で表しておく。このとき、命題 8 より、

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

ため、

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

が分かる。よって、基底 $R \subset U$ と $T \subset W$ に関する $G \circ F$ の表現行列は、 BA であることが成り立つ。 $\square$