7　カーネルと像

定義 **1.** 線形写像 $F\colon U \to V$ において、次のように定義された部分集合 $\ker(F) \subset U$ と $\mathrm{im}(F) \subset V$ は、それぞれ F のカーネルと F の像と呼ばれる。

$$\ker(F) = \{\mathbf{u} \in U \mid F(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\} \subset U$$
$$\mathrm{im}(F) = \{F(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in U\} \subset V$$

例 2. (1) 恒等写像 $\mathrm{id}_U\colon U \to U$, $\mathrm{id}_U(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$, に対して、

$$\ker(\mathrm{id}_U) = \{\mathbf{u} \in U \mid \mathbf{u} = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{0}\}$$
$$\mathrm{im}(\mathrm{id}_U) = \{\mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in U\} = U$$

である。

(2) ゼロ写像 $\mathbf{0}\colon U \to V$, $\mathbf{0}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, に対して、

$$\ker(\mathbf{0}) = \{\mathbf{u} \in U \mid \mathbf{0} = \mathbf{0}\} = U$$
$$\mathrm{im}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{0} \mid \mathbf{u} \in U\} = \{\mathbf{0}\}$$

である。

補題 **3.** 線形写像 $F\colon U \to V$ について、$\ker(F) \subset U$ と $\mathrm{im}(F) \subset V$ は、部分空間である。

証明. $\mathrm{im}(F) \subset V$ は部分空間であることを示す。$\ker(F) \subset U$ は部分空間であることが、同様に示される。$\mathrm{im}(F) \subset V$ が、授業 1 の命題 7 の性質 (i)—(iii) を満たすことを示せばよい。

(i) $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ため、$\mathbf{0} \in \mathrm{im}(F)$ が分かる。

(ii) $\mathbf{v}_1 = F(\mathbf{u}_1), \mathbf{v}_2 = F(\mathbf{u}_2) \in \mathrm{im}(F)$ のとき、

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v_2} = F(\mathbf{u}_1) + F(\mathbf{u}_2) = F(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \in \mathrm{im}(F)$$

が成り立つ。

(iii) $\mathbf{v} = F(\mathbf{u}) \in \mathrm{im}(F)$ と $a \in \mathbb{R}$ のとき、

$$a\mathbf{v} = aF(\mathbf{u}) = F(a\mathbf{u}) \in \mathrm{im}(F)$$

が得られる。

よって、授業 1 の命題 7 から、$\mathrm{im}(F) \subset V$ は、部分空間であることが成り立つ。 □

補題 **4.** 線形写像 $F\colon U \to V$ に対して、次の性質 (i) と (ii) は同値である。

(i) $\ker(F) = \{\mathbf{0}\}$ である。

(ii) $F\colon U \to V$ は単射である。

証明. 「(ii)⇒(i)」は自明なので、「(i)⇒(ii)」を示す。$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$ を、$F(\mathbf{u}_1) = F(\mathbf{u}_2)$ 満たすとき、$F(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = F(\mathbf{u}_1) - F(\mathbf{u}_2) = \mathbf{0}$ が成り立つため、$\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \in \ker(F)$ が分かる。このとき、(i) より、$\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$ が分かるため、$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ を得る。よって、F は単射であることを示した。 □

定義 **5.** 有限次元ベクトル空間 U と V、線形写像 $F\colon U \to V$ において、$\ker(F)$ と $\mathrm{im}(F)$ の次元は、それぞれ F の退化次数と F の階数と呼ばれ、

$$\mathrm{null}(F) = \dim(\ker(F))$$
$$\mathrm{rank}(F) = \dim(\mathrm{im}(F))$$

と書かれる。

補題 **6.** A を、$m \times n$ 行列、$F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を、$F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ で定める線形写像とすると、

$$\mathrm{rank}(F) = \mathrm{rank}(A)$$

である。

証明. 像の定義より、$\mathrm{im}(F) \subset \mathbb{R}^m$ は、A の列ベクトルで生成される部分空間である。

まず、A は、簡約な行列であることを仮定する。このとき、$\mathrm{rank}(A)$ は、A の主成分の個数と定義された。一方、主成分と含む列ベクトルのなす部分集合 $S = \{\mathbf{a}_{j_1}, \ldots, \mathbf{a}_{j_r}\} \subset \mathrm{im}(F)$ は、$\mathrm{im}(F)$ の基底である。なぜなら、A が簡約な行列であるため、S は 1 次独立で、主成分を含まない列ベクトルが、主成分を含む列ベクトルの 1 次結合で表されることが分かる。

次に、A を、一般の $m \times n$ 行列とする。B を、A の簡約化とすると、階数の定義より、$\mathrm{rank}(A)$ は、$\mathrm{rank}(B)$ と等しいが分かる。さらに、$B = CA$ を満たす可逆な $m \times m$ 行列 C が存在する。$G\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ を、$G(\mathbf{y}) = C\mathbf{y}$ で定める線形写像とすると、

$$(G \circ F)(\mathbf{x}) = CA\mathbf{x} = B\mathbf{x}$$

を得る。よって、$\mathrm{rank}(F) = \mathrm{rank}(G \circ F)$ を示せばよい。C は、可逆であるため、$G\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ は、全単射で、$G^{-1}(\mathbf{z}) = C^{-1}\mathbf{z}$ であることが分かる。よって、$S = \{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_r\} \subset \mathrm{im}(F)$ は基底であるとき、$G(S) = \{G(\mathbf{y}_1), \ldots, G(\mathbf{y}_r)\} \subset \mathrm{im}(G \circ F)$ も基底であることが成り立つ。同様に、$T = \{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_s\} \subset \mathrm{im}(G \circ F)$ は基底であるとき、$G^{-1}(T) = \{G^{-1}(\mathbf{z}_1), \ldots, G^{-1}(\mathbf{z}_s)\} \subset \mathrm{im}(F)$ も基底であることが分かる。特に、$r = s$ であるため、

$$\mathrm{rank}(F) = \dim(\mathrm{im}(F)) = \dim(\mathrm{im}(G \circ F)) = \mathrm{rank}(G \circ F)$$

が成り立つ。 □

命題 **7.** U と V を、有限次元ベクトル空間、$F\colon U \to V$ を、線形写像、$R = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\} \subset U$、$S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\} \subset V$ を、基底、A を、F の基底 $R \subset U$ と $S \subset V$ に関する表現行列とする。このとき、

$$\mathrm{rank}(F) = \mathrm{rank}(A)$$

である。

証明. $G\colon \mathbb{R}^n \to U$ と $H\colon \mathbb{R}^m \to V$ を、次のように定める線形写像とする。

$$G\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n, \qquad H\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = y_1\mathbf{v}_1 + \cdots + y_m\mathbf{v}_m$$

このとき、G と H は全単射で、$(H^{-1} \circ F \circ G)(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ であるため、補題 6 より、

$$\mathrm{rank}(H^{-1} \circ F \circ G) = \mathrm{rank}(A)$$

であることが分かる。さらに、G と H は全単射なので、補題 6 の証明と同じように、

$$\mathrm{rank}(H^{-1} \circ F \circ G) = \mathrm{rank}(F \circ G) = \mathrm{rank}(F)$$

が示される。よって、$\mathrm{rank}(F) = \mathrm{rank}(A)$ が成り立つ。 □

次の結果は、便利である。

定理 **8.** 有限次元ベクトル空間 U と V、線形写像 $F\colon U \to V$ に対して、

$$\mathrm{null}(F) + \mathrm{rank}(F) = \dim(U)$$

である。

証明. $r = \mathrm{null}(F)$, $s = \mathrm{rank}(F)$ とおき、$\ker(F)$ と $\mathrm{im}(F)$ の基底

$$R = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\} \subset \ker(F)$$
$$S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\} \subset \mathrm{im}(F)$$

とする。U のベクトル $\mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_{r+s}$ を、

$$F(\mathbf{u}_{r+1}) = \mathbf{v}_1, \quad F(\mathbf{u}_{r+2}) = \mathbf{v}_2, \quad \cdots F(\mathbf{u}_{r+s}) = \mathbf{v}_s$$

となるように捕る。このとき、

$$T = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_{r+s}\} \subset U$$

が、U の基底となることを示せばよい。

まず、T が、U を生成することを示す。$\mathbf{u}$ を U の任意のベクトルとする。$F(\mathbf{u}) \in \mathrm{im}(F)$ ため、

$$F(\mathbf{u}) = b_1\mathbf{v}_1 + \cdots + b_s\mathbf{v}_s \qquad (b_1, \dots, b_s \in \mathbb{R})$$

で表される。さて、

$$\begin{aligned} &F(\mathbf{u} - (b_1\mathbf{u}_{r+1} + \cdots + b_s\mathbf{u}_{r+s})) = F(\mathbf{u}) - (b_1F(\mathbf{u}_{r+1}) + \cdots + b_sF(\mathbf{u}_{r+s})) \\ &= b_1\mathbf{v}_1 + \cdots + b_s\mathbf{v}_s - (b_1\mathbf{v}_1 + \cdots + b_s\mathbf{v}_s) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

なので、$\mathbf{u} - (b_1\mathbf{u}_{r+1} + \cdots + b_s\mathbf{u}_{r+s}) \in \ker(F)$ が分かる。ゆえに、

$$\mathbf{u} - (b_1\mathbf{u}_{r+1} + \cdots + b_s\mathbf{u}_{r+s}) = a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_r\mathbf{u}_r \qquad (a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R})$$

で表される。よって、

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_r\mathbf{u}_r + b_1\mathbf{u}_{r+1} + \cdots + b_s\mathbf{u}_{r+s}$$

となるため、U が、$T = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_{r+s}\}$ で生成されることが分かる。

次に、T が、1 次独立であることを示す。1 次結合

$$a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_r\mathbf{u}_r + b_1\mathbf{u}_{r+1} + \cdots + b_s\mathbf{u}_{r+s} = \mathbf{0}$$

をおいておく。両辺に F を施すと、$\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r \in \ker(F)$ ため、

$$b_1F(\mathbf{u}_{r+1}) + \cdots + b_sF(\mathbf{u}_{r+s}) = \mathbf{0}$$

が成り立つ。よって、

$$b_1\mathbf{v}_1 + \cdots + b_s\mathbf{v}_s = \mathbf{0}$$

が分かる。$S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s\} \subset \mathrm{im}(F)$ が、1 次独立であるため、$b_1 = 0, \ldots, b_s = 0$ を得る。よって、

$$a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_r\mathbf{u}_r = \mathbf{0}$$

が分かる。$R = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\} \subset \ker(F)$ が、1 次独立であるため、$a_1 = 0, \ldots, a_r = 0$ が成り立つ。これで、$T = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{r+1}, \ldots, \mathbf{u}_{r+s}\}$ が、1 次独立であることを示した。 □

例題 9. $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を次のように定める線形写像とする。

$$F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

(i) F の退化次数と階数を求めよ。

(ii) $\ker(F)$ の基底 R、$\mathrm{im}(F)$ の基底 S を求めよ。

解答. (i) A の簡約した行列 B を計算すると、

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を得る。よって、$\mathrm{rank}(A) = 2$ が分かる。今、補題 6 より、$\mathrm{rank}(F) = \mathrm{rank}(A) = 2$、定理 8 より、$\mathrm{null}(F) = 4 - \mathrm{rank}(F) = 2$ が成り立つ。

(ii) まず、$\ker(F)$ の基底 R を与える。

$$\ker(F) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid B\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

ため、$\ker(F)$ は、次の連立 1 次方程式の解集合と等しい。

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & - & x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

その解は、次のように表される。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

すなわち、

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

は、$\ker(F)$ の基底であることが分かる。

次に、$\mathrm{im}(F)$ の基底 S を与える。A の、簡約した行列 B の主成分を含む列ベクトルと対応する列ベクトルからなる部分集合

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{im}(F)$$

は、$\mathrm{im}(F)$ の基底である。

以下、$S \subset \mathrm{im}(F)$ は基底である主張を示す。C を、$B = CA$ を満たす可逆な 3×3 行列、$G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を、$G(\mathbf{y}) = C\mathbf{y}$ で定める線形写像とする。このとき、合成写像 $G \circ F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ は、$(G \circ F)(\mathbf{x}) = CA\mathbf{x} = B\mathbf{x}$ で表される線形写像である。$\mathrm{im}(G \circ F) \subset \mathbb{R}^3$ は、B の列ベクトルで生成された部分空間である。さらに、B が簡約な行列であるため、主成分を含む列ベクトルからなる部分集合

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{im}(G \circ F)$$

は、基底であることが分かる。今、$G^{-1}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ は、$G^{-1}(\mathbf{z}) = C^{-1}\mathbf{z}$ で表され、

$$S = G^{-1}(T) \subset \mathrm{im}(F)$$

は、$\mathrm{im}(F)$ の基底であることが成り立つ。 $\square$