8　階数（続き）

今回、階数について色々な結果を示す。

命題 1. $m \times n$ 行列 B と $n \times p$ 行列 A に対して、

$$\operatorname{rank}(BA) \leqslant \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}$$

である。

証明. $F\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ と $G\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を、それぞれの $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ と $G(\mathbf{y}) = B\mathbf{y}$ で定める線形写像とする。このとき、F の基本基底 $R \subset \mathbb{R}^p$ と $S \subset \mathbb{R}^n$ に関する表現行列は A、G の基本基底 $S \subset \mathbb{R}^n$ と $T \subset \mathbb{R}^m$ に関する表現行列は B、$G \circ F$ の基本基底 $R \subset \mathbb{R}^p$ と $T \subset \mathbb{R}^m$ に関する表現行列は BA である。さらに、

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(F)$$
$$\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(G)$$
$$\operatorname{rank}(BA) = \operatorname{rank}(G \circ F)$$

が分かる。今、$\operatorname{im}(G \circ F) \subset \operatorname{im}(G)$ ため、

$$\operatorname{rank}(G \circ F) = \dim(\operatorname{im}(G \circ F)) \leqslant \dim(\operatorname{im}(G)) = \operatorname{rank}(G)$$

が成り立つ。同様に、$\ker(F) \subset \ker(G \circ F)$ ため、

$$\operatorname{null}(G \circ F) = \dim(\ker(G \circ F) \geqslant \dim(\ker(F)) = \operatorname{null}(F)$$

が分かる。よって、

$$\operatorname{rank}(G \circ F) = p - \operatorname{null}(G \circ F) \leqslant p - \operatorname{null}(F) = \operatorname{rank}(F)$$

が成り立つ。これで、命題を示した。 □

定理 2. $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像、$r = \operatorname{rank}(F)$ とする。このとき、次の性質を満たす基底 $R' \subset \mathbb{R}^n$ と $S' \subset \mathbb{R}^m$ が存在する。「F の基底 $R' \subset \mathbb{R}^n$ と $S' \subset \mathbb{R}^m$ に関する表現行列 C は、

$$C = \begin{pmatrix} E_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$$

となる。」

証明. 前回証明した定理 8 より、

$$\dim(\ker(F)) = \dim(\mathbb{R}^n) - \dim(\mathrm{im}(F)) = n - r$$

が分かる。まず、$\ker(F)$ の基底 $R'' = \{\mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_n\}$ を捕る。それから、$R'' \subset R'$ を満たす $\mathbb{R}^n$ の基底 $R' = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_n\}$ を捕る。このとき、$\mathbf{v}_1 = F(\mathbf{u}_1), \dots, \mathbf{v}_r = F(\mathbf{u}_r)$ とすると、部分集合 $S'' = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\} \subset \mathrm{im}(F)$ が、$\mathrm{im}(F)$ の基底である。なぜなら、S'' が $\mathrm{im}(F)$ を生成し、S'' の個数は $\mathrm{im}(F)$ の次元と等しい。特に、$S'' \subset \mathbb{R}^m$ は 1 次独立である。最後に、$S'' \subset S'$ を満たす $\mathbb{R}^m$ 基底 $S' = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_m\}$ と捕る。

今、基底 $R' \subset \mathbb{R}^n$ と $S' \subset \mathbb{R}^m$ の定義より、

$$F(\mathbf{u}_j) = \begin{cases} \mathbf{v}_j & (1 \leqslant j \leqslant r) \\ \mathbf{0} & (r+1 \leqslant j \leqslant n) \end{cases}$$

が分かる。すなわち、F の基底 $R' \subset \mathbb{R}^n$ と $S' \subset \mathbb{R}^m$ に関する表現行列 C は、

$$C = \begin{pmatrix} E_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$$

となる。 □

系 **3.** $m \times n$ 行列 A に対して、次の性質 (i)—(ii) は同値である。

(i) $\mathrm{rank}(A) = r$ である。

(ii) 以下の式が成立するような m 次の可逆行列 X と n 次の可逆行列 Y が存在する。

$$XAY = \begin{pmatrix} E_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$$

証明. $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を、$F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ で定義される線形写像とする。このとき、F の基本基底 $R = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ と $S = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\} \subset \mathbb{R}^m$ に関する表現行列が、A である。定理 2 より、F の基底 $R' \subset \mathbb{R}^n$ と $S' \subset \mathbb{R}^m$ に関する表現行列 C は、

$$C = \begin{pmatrix} E_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$$

となる基底 $R' \subset \mathbb{R}^n$ と $S' \subset \mathbb{R}^m$ が存在する。ここで、

$$r = \mathrm{rank}(F) = \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(C)$$

である。今、P を恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ の基底 $R \subset \mathbb{R}^n$ と $R' \subset \mathbb{R}^n$ に関する表現行列、Q を恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}$ の基底 $S \subset \mathbb{R}^m$ と $S' \subset \mathbb{R}^m$ に関する表現行列とすると、

$$C = Q^{-1}AP$$

が分かる。よって、$X = Q^{-1}$、$Y = P$ とすると、系が成り立つ。 □

注 4. 任意の可逆行列は基本行列の積として書くことができる。ゆえに、任意の $m \times n$ 行列 A に対して、列基本変形と行基本変形を両方用いると、次の形の行列に変形できる。

$$XAY = \begin{pmatrix} E_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$$

ここで、r は A の階数 $\mathrm{rank}(A)$ である。

例 5. 次の 3×4 行列 A を考えてみる。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

次のように行基本変形を使い、A の簡約化 B が成り立つ。

$$B = E_{3,2}(-1)E_{1,2}(-2)P_3(-\tfrac{1}{8})P_2(-\tfrac{1}{4})E_{3,1}(-9)E_{2,1}(-5)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

それから、列基本変形を使い、次の行列 $C = XAY$ が成り立つ。

$$C = BE_{1,3}(1)E_{1,4}(2)E_{2,3}(-2)E_{2,4}(-3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって、

$$X = E_{3,2}(-1)E_{1,2}(-2)P_3(-\tfrac{1}{8})P(-\tfrac{1}{4})E_{3,1}(-9)E_{2,1}(-5)$$
$$Y = E_{1,3}(1)E_{1,4}(2)E_{2,3}(-2)E_{2,4}(-3)$$

とすると、

$$XAY = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を得る。X と Y を計算する。

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$