

9 固有値と固有ベクトル

ベクトル空間 V と線形写像 $F: V \rightarrow V$ をおいておく。任意の実数 $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して、写像 $F - \lambda \text{id}_V: V \rightarrow V$ も線形写像である。なぜなら、

$$\begin{aligned}(F - \lambda \text{id}_V)(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) &= F(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) - \lambda(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = F(\mathbf{u}_1) + F(\mathbf{u}_2) - \lambda\mathbf{u}_1 - \lambda\mathbf{u}_2 \\ &= (F - \lambda \text{id}_V)(\mathbf{u}_1) + (F - \lambda \text{id}_V)(\mathbf{u}_2) \\ (F - \lambda \text{id}_V)(c\mathbf{u}) &= F(c\mathbf{u}) - \lambda c\mathbf{u} = cF(\mathbf{u}) - c\lambda\mathbf{u} = c(F - \lambda \text{id}_V)(\mathbf{u})\end{aligned}$$

定義 1. ベクトル空間 V と線形写像 $F: V \rightarrow V$ をおいておく。任意の実数 $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して、以下の部分空間はゼロ空間でないとき、 λ が F の固有値、 $\ker(F - \lambda \text{id}_V)$ が F の固有値 λ に属する固有空間、 $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in \ker(F - \lambda \text{id}_V)$ が F の固有値 λ に属する固有ベクトルと呼ばれる。

$$\ker(F - \lambda \text{id}_V) = \{\mathbf{u} \in V \mid (F - \lambda \text{id}_V)(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{u} \in V \mid F(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}\} \subset V$$

例 2. (1) ゼロ写像 $\mathbf{0}: V \rightarrow V$ に対して、 $\lambda = 0$ はただ一つの固有値、 $\lambda = 0$ に属する固有空間は V 、任意の $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in V$ は $\lambda = 0$ に属する固有ベクトルである。

(2) 恒等写像 $\text{id}_V: V \rightarrow V$ に対して、 $\lambda = 1$ はただ一つの固有値、 $\lambda = 1$ に属する固有空間は V 、任意の $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in V$ は $\lambda = 1$ に属する固有ベクトルである。

(3) $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を次のように定める線形写像とする。

$$F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

このとき、 $\lambda = 2$ と $\lambda = 3$ は F の固有値、それらに属する固有空間は次のように表される。

$$\begin{aligned}\ker(F - 2 \text{id}_{\mathbb{R}^2}) &= \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid c_1 \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2 \\ \ker(F - 3 \text{id}_{\mathbb{R}^2}) &= \left\{ c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \mid c_2 \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2\end{aligned}$$

(4) $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を次のように定める線形写像とする。

$$G \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

このとき、 G の固有値はない。

(5) V を微分可能関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ のなすベクトル空間、 $D: V \rightarrow V$ を $D(f(x)) = f'(x)$ で定める線形写像とする。このとき、任意の実数 $\lambda \in \mathbb{R}$ は D の固有値、 D の λ に属する固有空間は次のように表される。

$$\ker(D - \lambda \text{id}_V) = \{ce^{\lambda x} \mid c \in \mathbb{R}\} \subset V$$

これから、 V を有限次元ベクトル空間とする。まず、線形写像 $F: V \rightarrow V$ の行列式を定める。

定義 3. 有限次元ベクトル空間 V をおいておく。線形写像 $F: V \rightarrow V$ の **行列式** は、

$$\det(F) = \det(A)$$

で定義される。ここで、 A は F のある基底 $S \subset V$ に関する表現行列である。

次の補題より、 $\det(F)$ はうまく定義されたものである。

補題 4. V を有限次元ベクトル空間、 $F: V \rightarrow V$ を線形写像、 $S \subset V$ と $T \subset V$ を基底、 A と B をそれぞれ F の基底 $S \subset V$ に関する表現行列と F の基底 $T \subset V$ に関する表現行列とする。このとき、 $\det(A) = \det(B)$ である。

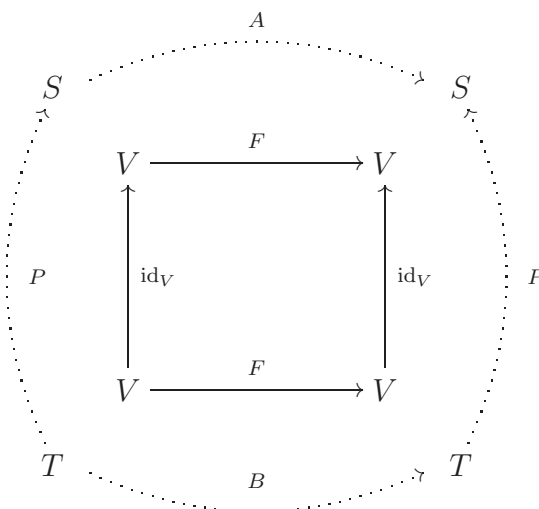
証明. P を恒等写像 $\text{id}_V: V \rightarrow V$ の基底 $T \subset V$ と $S \subset V$ に関する表現行列とすると、以下の図式を考えると、

$$B = P^{-1}AP$$

が分かる。よって、

$$\det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det(P)^{-1} \det(A) \det(P) = \det(A)$$

が成り立つ。



□

定義 5. 有限次元ベクトル空間 V と線形写像 $F: V \rightarrow V$ において、次のように定める多項式 $\chi_F(t)$ は、 F の**固有多項式**と呼ばれる。

$$\chi_F(t) = \det(F - t \text{id}_V)$$

命題 6. 有限次元ベクトル空間 V と線形写像 $G: V \rightarrow V$ に対して、次の性質 (i)–(ii) は同値である。

(i) $\ker(G) \neq \{0\}$

(ii) $\det(G) = 0$

証明. $S \subset V$ を V の基底、 A を G の $S \subset V$ に関する表現行列とする。このとき、

$$\begin{aligned} \ker(G) = \{0\} &\Leftrightarrow \text{null}(G) = 0 \Leftrightarrow \text{rank}(G) = \dim(V) \Leftrightarrow \\ \text{rank}(A) = \dim(V) &\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \det(G) \neq 0 \end{aligned}$$

が分かる。これで、命題が成り立つ。

□

定理 7. 有限次元ベクトル空間 V と線形写像 $F: V \rightarrow V$ をおいておく。実数 λ に対して次の性質 (i)–(ii) は同値である。

(i) λ は F の固有値である。

(ii) λ は F の固有多項式 $\chi_F(t)$ の根である。

証明. $G = F - \lambda \text{id}_V$ とする。固有値の定義より、 λ は F の固有値であることと $\ker(G) \neq \{0\}$ であることは同値である。さらに、固有多項式 $\chi_F(t)$ の定義より、 λ は固有多項式の根であることと $\det(G) = 0$ であることは同値である。ゆえに、定理は命題 6 から成り立つ。 $\square$

例 8. 例 2 に於ける線形写像をもう一回考えてみる。

(1) 有限次元 n のベクトル空間 V について、ゼロ写像 $0: V \rightarrow V$ の固有多項式は、

$$\chi_0(t) = \det(0 - t \text{id}_V) = \det(-t \text{id}_V) = (-t)^n$$

であるため、定理 7 より、 $\lambda = 0$ はただ一つの固有値であることが分かる。

(2) 有限次元 n のベクトル空間 V について、恒等写像 $\text{id}_V: V \rightarrow V$ の固有多項式は、

$$\chi_{\text{id}_V}(t) = \det(\text{id}_V - t \text{id}_V) = \det((1 - t) \text{id}_V) = (1 - t)^n$$

であるため、定理 7 より、 $\lambda = 1$ はただ一つの固有値であることが分かる。

(3) 線形写像 $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ の固有多項式は、

$$\chi_F(t) = \det(F - t \text{id}) = \det \begin{pmatrix} -t & 1 \\ -6 & 5 - t \end{pmatrix} = t^2 - 5t + 6 = (t - 2)(t - 3)$$

であるため、定理 7 より、 F の固有値は $\lambda = 2$ と $\lambda = 3$ であることが分かる。

(4) 線形写像 $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ の固有多項式は、

$$\chi_G(t) = \det(G - t \text{id}) = \det \begin{pmatrix} -t & -1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = t^2 + 1$$

であるため、定理 7 より、 G の固有値はないことが分かる。

(5) 微分可能関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ のなすベクトル空間 V は無限次元なので、線形写像 D の固有多項式が定義されていない。

命題 9. V をベクトル空間、 $F: V \rightarrow V$ を線形写像、 $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k$ を F の固有値、 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ をそれらに属する固有ベクトルとする。このとき、部分集合

$$S = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\} \subset V$$

は 1 次独立である。

証明. 帰納法を用いて示す。 $k = 0$ のときは自明なので、 $k = r - 1$ のときを正しいと仮定し、 $k = r$ のときを示せばよい。さて、

$$(F - \lambda_i \text{id}_V)(\mathbf{u}_j) = (\lambda_j - \lambda_i)\mathbf{u}_j$$

ため、ある 1 次関係 $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_r\mathbf{u}_r = \mathbf{0}$ に対して、

$$\begin{aligned} & ((F - \lambda_1 \text{id}_V) \circ (F - \lambda_2 \text{id}_V) \circ \cdots \circ (F - \lambda_{r-1} \text{id}_V))(c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_r\mathbf{u}_r) \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{0} + \cdots + (\lambda_r - \lambda_1)(\lambda_r - \lambda_2) \cdots (\lambda_r - \lambda_{r-1})c_r\mathbf{u}_r \end{aligned}$$

なので、 $c_r\mathbf{u}_r = \mathbf{0}$ が分かる。ゆえに、 $\mathbf{u}_r \neq \mathbf{0}$ ため、 $c_r = 0$ 、

$$c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_{r-1}\mathbf{u}_{r-1} = \mathbf{0}$$

を得る。帰納法の仮定より、 $c_1 = 0, \dots, c_{r-1} = 0$ ため、 $S = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\} \subset V$ は 1 次独立であることを示した。□

系 10. V を有限次元 n のベクトル空間、 $F: V \rightarrow V$ を n 個の互いに異なる固有値を持つ線形写像とする。このとき、 V が F の固有ベクトルからなる基底を持つ。

証明. $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ を F の固有値、 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ をそれらに属する固有ベクトルとする。命題 9 より、 $S = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\} \subset V$ は 1 次独立であることが分かる。しかし、 S の個数 n は V の次元 n と等しいので、 $S \subset V$ は基底であることが成り立つ。□

例 11. $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を次のように定める線形写像とする。

$$F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

F の固有多項式は $\chi_F(t) = (1 - t)^2$ なので、 $\lambda = 1$ はただ一つの固有値である。さらに、 $\lambda = 1$ と属する固有空間は、

$$\ker(F - \text{id}_{\mathbb{R}^2}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{x_1\mathbf{e}_1 \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$$

である。よって、このとき、 $\mathbb{R}^2$ が F の固有ベクトルからなる基底を持たない。