線形代数II・中間試験（11月25日)

ふりがな	
氏名	解答

学生番号	

氏名		学生番号	

問題 1 (10 点). W を有限次元ベクトル空間とする。次の命題の正誤を答えよ。

(1) 1 次独立である部分集合 $S \subset W$ に対して、$S \subset T$ を満たす基底 $T \subset W$ が存在する。

(2) W を生成する部分集合 $T \subset W$ に対して、$S \subset T$ を満たす基底 $S \subset W$ が存在する。

(3) 部分空間 $U \subset W$ に対して、$\dim(U) = \dim(W)$ ならば $U = W$ である。

(4) 部分空間 $U, V \subset W$ に対して、$\dim(U) = \dim(V)$ ならば $U = V$ である。

(5) 線形写像 $F\colon W \to W$ に対して、F は単射であるとき、F が全射である。

(1) 正

(2) 正

(3) 正

(4) 誤

(5) 正

問題 2 (10 点). $T \subset \mathbb{R}^3$ を、次のように定める部分集合とする。

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

次の各問いに答えよ。

(1) T が $\mathbb{R}^3$ を生成することを示せ。

(2) $S \subset T$ を満たす基底 $S \subset \mathbb{R}^3$ を求めよ。

(1) T に含まれているベクトルからなる行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

の簡約した行列を計算すると、

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を得る。ゆえに、$\mathrm{rank}(A) = 3$ ため、T が $\mathbb{R}^3$ を生成することが分かる。

(2) A の、B の主成分を含む列ベクトルと対応する列ベクトルからなる部分集合

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset T$$

は $\mathbb{R}^3$ の基底となることが分かる。

問題 3 (10 点). $V \subset \mathbb{R}^3$ を、次のように定める部分空間とする。

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = x_1 + x_3 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

$F\colon V \to \mathbb{R}^2$ を、次のように定める線形写像とする。

$$F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

次の各問いに答えよ。

(1) V の基底 $R \subset V$ を求めよ。

(2) F の基底 $R \subset V$ と基本基底 $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \subset \mathbb{R}^2$ に関する表現行列 A を求めよ。

(3) F の逆写像 F^{-1} の基本基底 $S \subset \mathbb{R}^2$ と $R \subset V$ に関する表現行列 B を求めよ。

(1) $\quad R = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(2) $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\quad B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

問題 4 (10 点). $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を、次のように定める線形写像とする。

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x_1 - 2x_2 - 8x_3 \\ 17x_1 - 3x_2 - 11x_3 \end{pmatrix}$$

$R = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \subset \mathbb{R}^3$, $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \subset \mathbb{R}^2$ を基本基底、$R' \subset \mathbb{R}^3$, $S' \subset \mathbb{R}^2$ を次のように定める基底とする。

$$R' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad S' = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ と $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を、それぞれ $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ と $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$ で定義される線形写像とする。次の各問いに答えよ。

(1) F の基底 $R \subset \mathbb{R}^3$ と $S \subset \mathbb{R}^2$ に関する表現行列 A を求めよ。

(2) 恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ の基底 $R' \subset \mathbb{R}^3$ と $R \subset \mathbb{R}^3$ に関する表現行列 P を求めよ。

(3) 恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の基底 $S' \subset \mathbb{R}^2$ と $S \subset \mathbb{R}^2$ に関する表現行列 Q を求めよ。

(4) F の基底 $R' \subset \mathbb{R}^3$ と $S' \subset \mathbb{R}^2$ に関する表現行列 B を求めよ。

(1) $$A = \begin{pmatrix} 12 & -2 & -8 \\ 17 & -3 & -11 \end{pmatrix}$$

(2) $$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) $$Q = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

(4) $$B = Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & -2 & -8 \\ 17 & -3 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

問題 5 (10 点). $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を、次のように定義される線形写像とする。

$$F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \\ 11 & -12 & 4 \end{pmatrix}$$

$S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ を基本基底、$S' \subset \mathbb{R}^3$ を次のように定める基底とする。

$$S' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を、$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ で定める線形写像とする。次の各問いに答えよ。

(1) 恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ の基底 $S' \subset \mathbb{R}^3$ と $S \subset \mathbb{R}^3$ に関する表現行列 P を求めよ。

(2) F の基底 $S' \subset \mathbb{R}^3$ と $S' \subset \mathbb{R}^3$ に関する表現行列 B を求めよ。

(1) $$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \\ 11 & -12 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

問題 6 (10 点). $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を、次のように定める線形写像とする。

$$F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

次の各問いに答えよ。

(1) F の退化次数 $\mathrm{null}(F)$ と、F の階数 $\mathrm{rank}(F)$ を求めよ。

(2) F のカーネルの基底 $R \subset \ker(F)$ と、F の像の基底 $S \subset \mathrm{im}(F)$ を求めよ。

(1) A の簡約した行列 B を計算すると、

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を得る。よって、

$$\mathrm{rank}(F) = \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B) = 2$$
$$\mathrm{null}(F) = \dim(\mathbb{R}^4) - \mathrm{rank}(F) = 4 - 2 = 2$$

が分かる。

(2) A の、B の主成分を含む列ベクトルと対応する列ベクトルからなる部分集合

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{im}(F)$$

は、$\mathrm{im}(F)$ の基底であることが分かる。カーネルの基底 $R \subset \ker(F)$ を与えるために、B と対応する連立 1 次方程式を解く。

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & & & - & x_4 & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

解答が次のように表される。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって、

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \ker(F)$$

はカーネルの基底となることが分かる。