練習問題その１ (解答)

問題 1. $A = (3 \quad 2 \ -1)$ とすると、$W_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ なので、命題 9 より、$(W_1, +, \cdot)$ は $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ の部分空間である。

W_2 が $\mathbf{0}$ を含まないので、$(W_2, +, \cdot)$ は $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ の部分空間ではない。

$(W_3, +, \cdot\cdot)$ は $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ の部分空間ではない。なぜなら、

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_3 \quad \text{なのに} \quad (-1)\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W_3.$$

問題 2. W は空集合でないとき、ある $\mathbf{u} \in W$ が存在する。よって、性質 (iii) を用いて、

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{u} \in W$$

が成り立つ。

問題 3. $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$ は、命題 7 の仮定 (i)—(iii) を満たすことを示す。まず、$W_1 \subset \mathbb{R}^3$ を考える。

(i) $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \cdot 0 \\ 5 \cdot 0 \end{pmatrix} \in W_1$

(ii) $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} t_1 \\ 3t_1 \\ 5t_1 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} t_2 \\ 3t_2 \\ 5t_2 \end{pmatrix} \in W_1$ ならば $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} t_1 \\ 3t_1 \\ 5t_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_2 \\ 3t_2 \\ 5t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 + t_2 \\ 3(t_1 + t_2) \\ 5(t_1 + t_2) \end{pmatrix} \in W_1$

(iii) $a \in \mathbb{R}$、$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} t \\ 3t \\ 5t \end{pmatrix} \in W_1$ ならば $a\mathbf{u} = \begin{pmatrix} at \\ 3at \\ 5at \end{pmatrix} \in W_1$

$W_1 \subset \mathbb{R}^3$ は仮定 (i)—(iii) 満たすことを示したので、命題 7 より、$(W_1, +, \cdot)$ は $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ の部分空間であることが得る。続いて、W_2 を考える。

(i) $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 + 0 \\ 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \\ -0 \end{pmatrix} \in W_2$

(ii) $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} s_1 + t_1 \\ 3s_1 + 2t_1 \\ -s_1 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} s_2 + t_2 \\ 3s_2 + 2t_2 \\ -s_2 \end{pmatrix} \in W_2$ ならば

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} (s_1 + s_2) + (t_1 + t_2) \\ 3(s_1 + s_2) + 2(t_1 + t_2) \\ -(s_1 + s_2) \end{pmatrix} \in W_2$$

(iii) $a \in \mathbb{R}$、$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} s + t \\ 3s + 2t \\ -s \end{pmatrix} \in W_2$ ならば $a\mathbf{u} = \begin{pmatrix} as + at \\ 3as + 2at \\ -as \end{pmatrix} \in W_2$

$W_2 \subset \mathbb{R}^3$ は命題 7 の仮定 (i)—(iii) を満たすことを示したので、命題 7 より、$(W_2, +, \cdot)$ は $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ の部分空間であることが分かる。

問題 4. $W \subset V$ は命題 7 の仮定 (i)—(iii) を満たすことを示せばよい。このために、微分関数の定義を思い出す。関数 $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は微分関数であることは、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、導関数 $f'(x)$ が存在することである。

(i) 定数数 $f(x) = 0$ に関して、$f'(x) = 0$ なので、微分関数である。

(ii) $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は微分関数のとき、$(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x)$ なので、$f+g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ も微分関数である。

(iii) $a \in \mathbb{R}$、$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は微分関数のとき、$(af)'(x) = af'(x)$ ののので、$af \colon \mathbb{R} \to R$ も微分関数である。

$W \subset V$ は命題 7 の仮定 (i)—(iii) を満たすことを示したので、$(W, +, \cdot)$ は $(V, +, \cdot)$ の部分空間であることが分かる。