練習問題その１０ (解答)

問題 1. 与えられた写像 $\langle -, - \rangle$ が定義 1 の性質 (i)–(iv) を満たすことを示す。

$$\begin{aligned}
\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle &= (x_1 + x_1')y_1 - (x_1 + x_1')y_2 - (x_2 + x_2')y_1 + 2(x_2 + x_2')y_2 \\
&= x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_1'y_1 - x_1'y_2 - x_2'y_1 + 2x_2'y_2 \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\
\left\langle a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle &= ax_1y_1 - ax_1y_2 - ax_2y_1 + 2ax_2y_2 \\
&= a(x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2) \\
&= a \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\
\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle &= x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 \\
&= y_1x_1 - y_1x_2 - y_2x_1 + 2y_2x_2 \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\
\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle &= x_1x_1 - x_1x_2 - x_2x_1 + 2x_2x_2 = (x_1 - x_2)^2 + x_2^2
\end{aligned}$$

問題 2. 三角不等式を用いて、

$$\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{v}\| \leqslant \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|$$

を得るため、

$$\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\| \leqslant \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

が分かる。同様に、

$$\|\mathbf{v}\| - \|\mathbf{u}\| \leqslant \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

が成り立つので、

$$|\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|| \leqslant \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

を示した。

問題 3. (i) 任意の $w \in W$ に対して、$\langle \mathbf{0}, \mathbf{w} \rangle = 0$ ため、$\mathbf{0} \in W$ が分かる。$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in W^\perp$ のとき、任意の $w \in W$ に対して、$\langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w} \rangle = 0 + 0 = 0$ ため、$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in W^\perp$ を得る。$\mathbf{v} \in W^\perp$ と $a \in \mathbb{R}$ のとき、任意の $\mathbf{w} \in W$ に対して、$\langle a\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = a\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ なので、$a\mathbf{v} \in W^\perp$ が分かる。よって、$W^\perp \subset V$ は部分空間であることが成り立つ。

(ii) $\mathbf{v} \in W \cap W^\perp$ のとき、$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ ため、$\mathbf{v} = \mathbf{0}$ が分かる。

問題 4. (1) $S(\theta, \varphi) = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ の定義を思い出す。

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -\cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

計算すると、

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle = \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3 \rangle = 1$$

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3 \rangle = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle = 0$$

を得るので、$S \subset \mathbb{R}^3$ は正規直交であることが分かる。

(2) 補題 12 より、

$$c_1 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_1 \rangle = x_1 \cos\theta\cos\varphi - x_2 \sin\theta - x_3 \cos\theta\sin\varphi$$

$$c_2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_2 \rangle = x_1 \sin\theta\sin\varphi + x_2 \cos\theta - x_3 \sin\theta\sin\varphi$$

$$c_3 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_3 \rangle = x_1 \sin\varphi + x_3 \cos$$