練習問題その１１ (解答)

問題 1. A の固有多項式は、

$$\chi_A(t) = \det(A - tE) = \det \begin{pmatrix} -3-t & 3 \\ 3 & 5-t \end{pmatrix}$$
$$= (-3-t)(5-t) - 9 = t^2 - 2t - 24 = (t-6)(t+4)$$

であるため、$\lambda_1 = 6$ と $\lambda_2 = -4$ は A の固有値である。定義より、λ_i に属する固有ベクトル $\mathbf{v}_i$ は、連立 1 次方程式 $(A - \lambda_i E)\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ のゼロでない解である。例として、

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は、それぞれ λ_1 と λ_2 に属する固有ベクトルである。

問題 2. $\mathbf{a}_j$ を A の第 j 列とすると、

$$\lambda \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j\rangle = ({}^t\!A)A \text{ の } (i,j) \text{ 成分}$$

である。$({}^t\!A)A = A^2 = O$ ため、任意の (i,j) に対して、$\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j\rangle = 0$ を得る。特に、任意の i に対して、$\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i\rangle = 0$ が分かる。ゆえに、任意の i に対して、$\mathbf{a}_i = \mathbf{0}$ ため、$A = O$ が成り立つ。

問題 3. (i) P は直交行列のとき、$P^{-1} = {}^tP$、${}^tP$ も直交行列であるため、P^{-1} も直交行列であることが分かる。

(ii) P, Q は直交行列であるため、任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$\|PQ\mathbf{x}\| = \|Q\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$$

が分かる。ゆえに、PQ も直交行列である。

問題 4. 例 8 を用いて、

$$\text{(i)} \quad \Leftrightarrow \quad P \text{ は直交行列} \quad \Leftrightarrow \quad {}^tP \text{ は直交行列} \quad \Leftrightarrow \quad \text{(ii)}$$

を得る。