練習問題その２ (解答)

問題 1. $W = \{\mathbf{0}\} \subset V$

問題 2. 任意のベクトル $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ に対して、次の連立 1 次方程式が解を持つことを示せばよい。

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

今、この連立 1 次方程式と次の連立 1 次方程式は同値である。

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

仮定 $ad - bc \neq 0$ より、この連立 1 次方程式はただ一つの解を持つので、与えられた $\mathbf{v}$ はベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ の 1 次結合となることを示した。

問題 3. $1 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ なので、S は 1 次従属であることが得る。

問題 4. ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ は基本ベクトル $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ からなる部分集合 $T \subset \mathbb{R}^n$ で生成される。従って、命題 9 より、$k > n$ 個のベクトル $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ からなる部分集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ は、必ず 1 次従属であることが分かる。