練習問題その３ (解答)

問題 1. (i) $1 \cdot \mathbf{u} + (-1) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

(ii) $1 \cdot \mathbf{0} + 0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

(iii) $1 \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + (-1) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) + (-2) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

問題 2. ある 1 次関係 $c_1(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + c_2(\mathbf{v} + \mathbf{w}) + c_3(\mathbf{w} + \mathbf{u}) = \mathbf{0}$ から、次のような 1 次関係が成り立つ。

$$(c_1 + c_3)\mathbf{u} + (c_1 + c_2)\mathbf{v} + (c_2 + c_3)\mathbf{w} = \mathbf{0}$$

$S = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ は 1 次独立であるため、$c_1 + c_3 = 0,\ c_1 + c_2 = 0,\ c_2 + c_3 = 0$ であることが分かる。このとき、必ず $c_1 = 0,\ c_2 = 0,\ c_3 = 0$ であるため、$S' = \{\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{w} + \mathbf{u}\}$ は 1 次独立であることが示された。

問題 3. $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset W$ は基底で、$T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset W$ は基底でもある。

問題 4. $m = \dim(V),\ n = \dim(W)$ とする。

(i) V は m 個のベクトルからなる部分集合で生成されるので、授業 2 の命題 9 より、m 個以上のベクトルからなる 1 次独立である部分集合を含まないことが分かる。ある W の基底 $S \subset W$ は、n 個のベクトルからなる 1 次独立で、V に含まれているため、$n \leqslant m$ を得る。

(ii) W の基底 $S = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\} \subset W$ をおいておく。$W \neq V$ を仮定すると、W に含まれていない $\mathbf{u}_{n+1} \in V$ が存在し、$S' = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{n+1}\} \subset V$ は 1 次独立である。しかし、V は、n 個以上のベクトルからなる 1 次独立である部分集合を含まないため、$W = V$ であることが分かる。

以下、S' は 1 次独立であることを示す。ある 1 次関係

$$c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n + c_{n+1}\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{0}$$

に対して、$c_{n+1} \neq 0$ のとき、

$$\mathbf{u}_{n+1} = -\frac{1}{c_{n+1}}(c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n) \in W$$

が成り立つ。しかし、$\mathbf{u}_{n+1} \notin W$ より、$c_{n+1} = 0$ である。S は 1 次独立であるため、$c_1 = 0, \ldots, c_n = 0$ も分かる。よって、S' は 1 次独立であることを示した。