練習問題その４ (解答)

問題 1. W の次元はある基底 B の個数と定義された。定理 1 より、W を、T に含まれている基底 $B \subset T$ を持つ。特に、B の個数は T の個数より小さい。すなわち、$\dim(W) \leqslant n$ である。

問題 2. $W_1 \cap W_2 \subset V$ と $W_1 + W_2 \subset V$ は、授業 2 の命題 7 の性質 (i)—(iii) を満たすことを示せばよい。

まず、$W_1 \cap W_2$ が (i)—(iii) を満たすことを示す。(i) W_1 と W_2 は部分空間ため、$\mathbf{0} \in W_1$ かつ $\mathbf{0} \in W_2$ である。よって、$\mathbf{0} \in W_1 \cap W_2$ が分かる。(ii) $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2$ のとき、$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_1$ かつ $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_2$ である。W_1 と W_2 は部分空間ため、$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W_1$ かつ $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W_2$ を得る。よって、$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W_1 \cap W_2$ が成り立つ。(iii) $\mathbf{u} \in W_1 \cap W_2$ なら、$\mathbf{u} \in W_1$ かつ $\mathbf{u} \in W_2$ である。W_1 と W_2 は部分空間なので、任意のスカラー $a \in \mathbb{R}$ に対して、$a\mathbf{u} \in W_1$ かつ $a\mathbf{u} \in W_2$ が分かる。よって、$a\mathbf{u} \in W_1 \cap W_2$ を得る。授業 1 の命題 7 より、$W_1 \cap W_2 \subset V$ は部分空間であることが成り立つ。

続いて、$W_1 + W_2$ が (i)—(iii) を満たすことを示す。(i) $\mathbf{0} \in W_1$ かつ $\mathbf{0} \in W_2$ ため、$\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} \in W_1 + W_2$ である。(ii) $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_1 + W_2$ が、それぞれ $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ で表される。ここで、$\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1 \in W_1$ と $\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2 \in W_2$ である。よって、$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1) + (\mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2) = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1) + (\mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2) \in W_1 + W_2$ である。なぜなら、$\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1 \in W_1$ と $\mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2 \in W_2$ である。(iii) $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in W_1 + W_2$（$\mathbf{u}_1 \in W_1, \mathbf{u}_2 \in W_2$）のとき、任意のスカラー a に対して、$a\mathbf{u} = a(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = (a\mathbf{u}_1) + (a\mathbf{u}_2) \in W_1 + W_2$ を得る。よって、授業 1 の命題 7 より、$W_1 + W_2 \subset V$ は部分空間であることが成り立つ。

問題 3. 命題 5 より、

$$\dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 + W_2)$$

が分かる。仮定より、$\dim(W_1 \cap W_2) = 0$ を得る。よって、$W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つ。（なぜなら、$\dim(W_1 \cap W_2) = 0$ ため、$W_1 \cap W_2$ が 0 個のベクトルからなる基底を持つ。すなわち、$W_1 \cap W_2$ に対して、空集合 $\emptyset \subset W_1 \cap W_2$ は基底である。よって、$W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ が分かる。）

問題 4. $(W_2 \cap W_3) + W_1$ は V の部分空間なので、練習問題その 3 の問題 4 より、

$$\dim((W_2 \cap W_3) + W_1) = \dim(V)$$

を示せばよい。

まず、

$$
\begin{aligned}
V = (W_3 \cap W_1) + W_2 \subset W_1 + W_2 \subset V \\
V = (W_1 \cap W_2) + W_3 \subset W_1 + W_3 \subset V \\
V = (W_1 \cap W_2) + W_3 \subset W_2 + W_3 \subset V
\end{aligned}
$$

であるため、

$$
W_1 + W_2 = W_3 + W_1 = W_2 + W_3 = V
$$

が分かる。続いて、$V = (W_1 \cap W_2) + W_3$ と $(W_1 \cap W_2) \cap W_3 = \{0\}$ なので、命題 5 を二回用いると、

$$
\begin{aligned}
\dim(V) &= \dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_3) - \dim((W_1 \cap W_2) \cap W_3) \\
&= \dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_3) \\
&= \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_3)
\end{aligned}
$$

を得る。ここで、$W_1 + W_2 = V$ なので、

$$
\dim(W_1) + \dim(W_2) + \dim(W_3) = 2\dim(V)
$$

が分かる。よって、

$$
\begin{aligned}
\dim((W_2 \cap W_3) + W_1) &= \dim(W_2 \cap W_2) + \dim(W_1) \\
&= \dim(W_2) + \dim(W_3) - \dim(W_2 + W_3) + \dim(W_1) \\
&= \dim(W_1) + \dim(W_2) + \dim(W_3) - \dim(W_2 + W_3) \\
&= 2\dim(V) - \dim(V) \\
&= \dim(V)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。これで、$(W_2 \cap W_3) + W_1 = V$ を示した。

<u>例</u> 5. $V = \mathbb{R}^3$ のとき、次のように定まる部分空間 $W_1, W_2, W_3 \subset V$ が問題 4 の仮定を満たす。

$$
W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 = 0 \right\}, \quad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_2 = 0 \right\}, \quad W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_3 = 0 \right\}
$$