

練習問題その 7 (解答)

問題 1. (i) A の簡約した行列 B を計算すると、

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を得る。よって、

$$\text{rank}(F) = \text{rank}(A) = \text{rank}(B) = 2$$

$$\text{null}(F) = \dim(\mathbb{R}^4) - \text{rank}(F) = 4 - 2 = 2$$

が分かる。

(ii) A の、 B の主成分を含む列ベクトルと対応する列ベクトルのなす部分集合

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \text{im}(F)$$

は、基底である。 B と対応する連立 1 次方程式

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & = & 0 \\ x_3 + x_4 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array}$$

の解は、次のように表される。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって、

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \ker(F)$$

は、基底である。

問題 2. (i) A の簡約した行列 B を計算すると、

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を得る。よって、

$$\text{rank}(F) = \text{rank}(A) = \text{rank}(B) = 3$$

$$\text{null}(F) = \dim(\mathbb{R}^5) - \text{rank}(F) = 5 - 3 = 2$$

が分かる。

(ii) A の、 B の主成分を含む列ベクトルと対応する列ベクトルのなす部分集合

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \text{im}(F)$$

は、基底である。 B と対応する連立 1 次方程式

$$\begin{aligned} x_1 &+ 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_2 &+ x_3 + x_4 &= 0 \\ &&x_5 &= 0 \\ &&0 &= 0 \end{aligned}$$

の解は、次のように表される。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって、

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \ker(F)$$

は、基底である。

問題 3. 「(iii) ならば、(i) かつ (ii)」は自明なので、「(i) ならば (ii)」と「(ii) ならば (i)」を示せばよい。

まず、「(i) ならば (ii)」を示す。 F は単射なので、 $\ker(F) = \{\mathbf{0}\}$ 、 $\text{null}(F) = 0$ であることが分かる。よって、定理 8 より、

$$\text{rank}(F) = \dim(\mathbb{R}^n) - \text{null}(F) = n - 0 = n$$

を得る。よって、 $\text{im}(F) \subset \mathbb{R}^n$ は、部分空間で、 $\dim(\text{im}(F)) = \dim(\mathbb{R}^n)$ であることが分かる。練習問題その 3 の問題 4 の (ii) より、 $\text{im}(F) = \mathbb{R}^n$ が成り立つ。ゆえに、 F は、全射である。

次に、「(ii) ならば (i)」を示す。 F は全射なので、 $\text{im}(F) = \mathbb{R}^n$ 、 $\text{rank}(F) = n$ であることが分かる。よって、定理 8 より、

$$\text{null}(F) = \dim(\mathbb{R}^n) - \text{rank}(F) = n - n = 0$$

を得る。すなわち、 $\ker(F) = \{\mathbf{0}\}$ である。補題 4 より、 F は単射であることが成り立つ。