

## 練習問題その9 (解答)

**問題 1.**  $\lambda$  を  $F$  の固有値とする。帰納法を用いて、 $\lambda^k$  が  $F^k$  の固有値であることを示す。 $k = 1$  のときは自明なので、 $k = r - 1$  のときを正しいと仮定し、 $k = r$  のときを示せばよい。さて、 $\mathbf{u}$  を  $\lambda$  に属する固有ベクトルとすると、

$$F^r(\mathbf{u}) = F^{r-1}(\lambda\mathbf{u}) = \lambda F^{r-1}(\mathbf{u})$$

ため、命題が成り立つ。今、 $F^k = \mathbf{0}$  を満たす  $k \geq 1$  において、 $\lambda^k = 0$  が分かる。よって、 $\lambda = 0$  が成り立つ。

**問題 2.** (i)  $\chi_F(t) = \det \begin{pmatrix} -1-t & 0 & -2 \\ 3 & 2-t & 2 \\ 1 & -1 & 3-t \end{pmatrix} = (2-t)(1-t)^2$

(ii) 定理 7 より、 $F$  の固有値は  $\lambda = 1$  と  $\lambda = 2$  である。

(iii) 計算すると、

$$\begin{aligned} \ker(F - \text{id}_{\mathbb{R}^3}) &= \left\{ c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3 \\ \ker(F - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3}) &= \left\{ c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

を得る。特に、 $\mathbb{R}^3$  が  $F$  の固有ベクトルからなる基底を持たない。

**問題 3.**  $F_a$  の固有多項式は、

$$\chi_{F_a}(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 & a \\ 0 & 2-t & a \\ 0 & 0 & a-t \end{pmatrix} = (1-t)(2-t)(a-t)$$

である。 $a \neq 1$  かつ  $a \neq 2$  のとき、 $\lambda = 1$ 、 $\lambda = 2$  と  $\lambda = a$  は三つの互いに異なる固有値なので、系 10 より、 $\mathbb{R}^3$  が  $F_a$  の固有ベクトルからなる基底を持つ。計算すると、

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{u}_a = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a-2 \end{pmatrix}$$

は、それぞれ  $\lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = a$  に属する固有ベクトルであることを得る。

$a = 1$  のとき、 $\lambda = 1$  と  $\lambda = 2$  が全ての固有値である。計算すると、 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$  は  $\lambda = 1$  に属する固有ベクトル、 $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$  は  $\lambda = 2$  に属する固有ベクトルであることを得る。特に、 $\mathbb{R}^3$  が  $F_1$  の固有ベクトルからなる基底を持つ。

$a = 2$  のとき、 $\lambda = 1$  と  $\lambda = 2$  が全ての固有値である。計算すると、 $\mathbf{e}_1$  は  $\lambda = 1$  に属する固有ベクトル、 $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$  は  $\lambda = 2$  に属する固有ベクトルである。さらに、 $F_2$  の  $\lambda = 2$  に属する固有空間は 1 次元である。よって、 $\mathbb{R}^3$  が  $F_2$  の固有ベクトルからなる基底を持たない。