

## 練習問題その10

問題 1. 次のように定める写像  $\langle -, - \rangle: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  が内積となることを示せ。

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$$

問題 2. 内積空間  $(V, \langle -, - \rangle)$  をおいておく。任意の  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  に対して、

$$|\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

であることを示せ。(ヒント :  $\mathbf{u} = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \mathbf{v}$ )

問題 3.  $(V, \langle -, - \rangle)$  を内積空間、 $W \subset V$  を部分空間とする。次の命題を示せ。

(i) 次のように定める部分集合  $W^\perp \subset V$  は部分空間である。

$$W^\perp = \{v \in V \mid \text{任意の } w \in W \text{ に対して, } \langle v, w \rangle = 0 \text{ である}\}$$

( $W^\perp$  は、 $W$  の  $V$  における直交補空間と呼ばれる。)

(ii)  $W \cap W^\perp = \{\mathbf{0}\}$  である。

問題 4. 以下の部分集合  $S = S(\theta, \varphi) \subset \mathbb{R}^3$  を考えてみる。

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \right\}$$

次の各問いに答えよ。

(1)  $S \subset \mathbb{R}^3$  は正規直交基底であることを示せ。

(2)  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$  の基底  $S \subset \mathbb{R}^3$  に関する座標  $c_1, c_2, c_3$  を求めよ。