

## 練習問題その4

**問題 1.** 有限次元ベクトル空間  $V$  において、 $n$  個のベクトルからなる部分集合  $T \subset V$  と  $T$  で生成された部分空間  $W \subset V$  に対して、

$$\dim(W) \leq n$$

であることを示せ。(ヒント：定理 1)

**問題 2.** ベクトル空間  $V$  とその部分空間  $W_1, W_2 \subset V$  に対して、部分集合

$$W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{w} \in V \mid \mathbf{w} \in W_1 \text{ かつ } \mathbf{w} \in W_2\}$$

$$W_1 + W_2 = \{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in V \mid \mathbf{w}_1 \in W_1 \text{ かつ } \mathbf{w}_2 \in W_2\}$$

は、 $V$  の部分空間であることを示せ。(ヒント：授業 1 の命題 7)

**問題 3.**  $V$  を有限次元ベクトル空間とし、 $W_1, W_2 \subset V$  を部分空間とする。次の命題を示せ。

「 $\dim(W_1) + \dim(W_2) = \dim(W_1 + W_2)$  ならば  $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ 」

**問題 4 (難しい).**  $V$  を有限次元ベクトル空間とし、 $W_1, W_2, W_3 \subset V$  を次の性質 (i)–(ii) を満たす部分空間とする。

$$(i) \quad W_1 \cap W_2 \cap W_3 = \{\mathbf{0}\}$$

$$(ii) \quad (W_1 \cap W_2) + W_3 = (W_3 \cap W_1) + W_2 = V$$

このとき、 $(W_2 \cap W_3) + W_1 = V$  であることを示せ。(ヒント：命題 5)