10　内積空間

内積空間は、ベクトル空間 V とその内積 $\langle -,- \rangle$ からなる組 $(V, \langle -,- \rangle)$ のものである。内積空間 $(V, \langle -,- \rangle)$ に関して、$\mathbf{v} \in V$ の長さ $\|\mathbf{v}\|$ とゼロでない $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ のなす角 θ が定義できる。

定義 **1.** ベクトル空間 V の内積とは、次の性質を満たす写像

$$\langle -,- \rangle \colon V \times V \to \mathbb{R}$$

のことである。

(i) 任意の $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \in V$ に対して、$\langle \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle$ である。

(ii) 任意の $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ と $a \in \mathbb{R}$ に対して、$\langle a\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = a\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ である。

(iii) 任意の $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ に対して、$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ である。

(iv) 任意の $\mathbf{u} \in V$ に対して、$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geqslant 0$、$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ ならば $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ である。

ベクトル空間 V と内積 $\langle -,- \rangle \colon V \times V \to \mathbb{R}$ からなる組 $(V, \langle -,- \rangle)$ は、内積空間と呼ばれる。

例 2. (1) $\mathbb{R}^n$ のとき、次のように定める写像 $\langle -,- \rangle \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が内積である。

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

これは $\mathbb{R}^n$ の標準的な内積とよばれ、内積空間 $(\mathbb{R}^n, \langle -,- \rangle)$ は n 次元ユークリッド空間と呼ばれる。

(2) 連続関数のなす空間 $C^0([a,b]) = \{ f \colon [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ は連続である} \}$ のとき、次のように定める写像 $\langle -,- \rangle \colon C^0([a,b]) \times C^0([a,b]) \to \mathbb{R}$ は、内積である。

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

定義 **3.** 内積空間 $(V, \langle -,- \rangle)$ において、ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ に対して、

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$$

なる関係が成り立つのとき、$\mathbf{u}, \mathbf{v}$ が直交していると呼ばれる。

例 4. (0) 一般的に、内積空間 $(V, \langle -, - \rangle)$ の零ベクトル $\mathbf{0} \in V$ と任意のベクトル $\mathbf{v} \in V$ が直交している。

(1) ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^n, \langle -, - \rangle)$ に関して、基本ベクトル $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ が互いに直交している。なぜなら、任意の $1 \leqslant i, j \leqslant n$ に対して、

$$\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

である。

(2) 関数空間 $(C^0([0, 2\pi]), \langle -, - \rangle)$ に関して、$\cos x$ と $\sin x$ が直交している。なぜなら、

$$\langle \cos x, \sin x \rangle = \int_0^{2\pi} \cos x \sin x dx = 0$$

である。

定義 **5.** 内積空間 $(V, \langle -, - \rangle)$ において、内積 $\langle -, - \rangle$ に関連するノルムは、

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$$

で定める写像 $\| - \| \colon V \to \mathbb{R}$ である。

例 6. (1) ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^3, \langle -, - \rangle)$ において、

$$\|2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7$$
$$\|4\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2 + 7\mathbf{e}_3\| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 7^2} = \sqrt{16 + 16 + 49} = \sqrt{81} = 9$$

である。

(2) 関数空間 $(C^0([0, 2\pi]), \langle -, - \rangle)$ において、

$$\| \sin x \| = \sqrt{\int_0^{2\pi} \sin x \cdot \sin x dx} = \sqrt{\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx} = \sqrt{\pi}$$

である。

命題 **7** **(コーシー・シュワルツの不等式).** 内積空間 $(V, \langle -, - \rangle)$ において、任意の $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ に対して、

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leqslant \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$$

である。

証明. $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ を固定する。定義 1 その (iv) より、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\langle t\mathbf{u} + \mathbf{v}, t\mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle \geqslant 0$$

が分かる。一方、定義 1 その (i)–(iii) より、

$$\langle t\mathbf{u} + \mathbf{v}, t\mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle t^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle t + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 t^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle t + \|\mathbf{v}\|^2$$

を得る。よって、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\|\mathbf{u}\|^2 t^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle t + \|\mathbf{v}\|^2 \geqslant 0$$

が分かる。ゆえに、二次方程式の根の公式より、

$$\Delta^2 = (2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)^2 - 4\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \leqslant 0$$

が成り立つ。すなわち、

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leqslant \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$$

を得る。 □

系 8 (三角不等式)**.** 内積空間 $(V, \langle -, - \rangle)$ において、任意の $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ に対して、

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leqslant \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

である。

証明. コーシー・シュワルツの不等式より、

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &\leqslant \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 = (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2 \end{aligned}$$

が分かる。$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|, \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ は非負の実数なので、系が成り立つ。 □

定義 9. 内積空間 $(V, \langle -, - \rangle)$ において、ゼロでないベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ のなす角 θ は、次の性質 (i)–(ii) を満たす実数 θ である。

(i) $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

(ii) $\cos\theta = \dfrac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$

例 10. (1) $(\mathbb{R}^3, \langle -, - \rangle)$ において、$\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ のなす角は、

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{2}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$$

で仮定される。計算すると、

$$\theta \fallingdotseq 35.26^\circ$$

となる。

定義 **11.** 内積空間 $(V, \langle -, - \rangle)$ をおいておく。

(1) 次の性質を満たす部分集合 $S \subset V$ は、正規直交であると呼ばれる。
「任意の $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$ に対して、

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \begin{cases} 1 & (\mathbf{u} = \mathbf{v}) \\ 0 & (\mathbf{u} \neq \mathbf{v}) \end{cases}$$

である。」

(2) 正規直交である基底 $S \subset V$ は、正規直交基底と呼ばれる。

補題 **12.** 内積空間 $(V, \langle -, - \rangle)$ とその正規直交基底 $S \subset V$ に関して、任意の $\mathbf{v} \in V$ に対して、

$$\mathbf{v} = \sum_{\mathbf{u} \in S} \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u}$$

である。

証明. $S \subset V$ が基底であるため、任意の $\mathbf{v} \in V$ は、一意的に次のように表される。

$$\mathbf{v} = \sum_{\mathbf{w} \in S} c_{\mathbf{w}} \mathbf{w} \qquad (c_{\mathbf{w}} \in \mathbb{R})$$

$S \subset V$ が正規直交であるため、任意の $\mathbf{u} \in S$ に対して、

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \langle \sum_{\mathbf{w} \in S} c_{\mathbf{w}} \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle = \sum_{\mathbf{w} \in S} c_{\mathbf{w}} \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle = c_{\mathbf{u}}$$

を得る。これで補題を示した。 □

命題 **13** (グラム・シュミットの正規直交化法)**.** 内積空間 $(V, \langle -, - \rangle)$、有限の 1 次独立である部分集合 $T = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset V$ において、$S = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset V$ を、帰納法を用いて、

$$\mathbf{v}'_k = \mathbf{v}_k - \sum_{1 \leqslant i < k} \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{u}_i$$
$$\mathbf{u}_k = \frac{\mathbf{v}'_k}{\|\mathbf{v}'_k\|}$$

で定義される部分集合とする。

(1) $S \subset V$ は正規直交である。

(2) $S \subset V$ で生成される部分空間と $T \subset V$ で生成される部分空間は等しい。

証明. 帰納法を用いて示す。$n = 1$ のときは自明なので、$n = r - 1$ のときを正しいと仮定し、$n = r$ のときを示せばよい。

以下、(1) を示す。帰納法の仮定より、$S' = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{r-1}\} \subset V$ は正規直交であることが分かる。さらに、$\mathbf{u}_r$ の定義より、

$$\langle \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_r \rangle = 1,$$

任意の $1 \leqslant j < r$ に対して、

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_j \rangle &= \|\mathbf{v}'_r\|^{-1} \langle \mathbf{v}'_r, \mathbf{u}_j \rangle \\
&= \|\mathbf{v}'_r\|^{-1} \langle \mathbf{v}_r - \sum_{1 \leqslant i < r} \langle \mathbf{v}_r, \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle \\
&= \|\mathbf{v}'_r\|^{-1} \big(\langle \mathbf{v}_r, \mathbf{u}_j \rangle - \sum_{1 \leqslant i < r} \langle \mathbf{v}_r, \mathbf{u}_i \rangle \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle \big) \\
&= \|\mathbf{v}'_r\|^{-1} \big(\langle \mathbf{v}_r, \mathbf{u}_j \rangle - \langle \mathbf{v}_r, \mathbf{u}_j \rangle \big) = 0
\end{aligned}$$

を得る。すなわち、$S = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\} \subset V$ は正規直交であることを示した。これで、(1) を示した。

さて、(2) を示す。帰納法の仮定より、

$$S' = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{r-1}\} \subset V$$
$$T' = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{r-1}\} \subset V$$

で生成される部分空間は等しい、$\mathbf{u}_r$ の定義より、

$$\mathbf{v}_r = \sum_{1 \leq i < r} \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{u}_i + \|\mathbf{v}'_r\| \mathbf{u}_r$$

ため、

$$S = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{r-1}, \mathbf{u}_r\} \subset V$$

$$T = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{r-1}, \mathbf{v}_r\} \subset V$$

で生成される部分空間は等しいことが分かる。これで、(2) を示した。 □

系 **14.** 有限次元内積空間 $(V, \langle -, - \rangle)$ に対して、正規直交基底 $S \subset V$ が存在する。

証明. 基底 $T = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset V$ をとると、グラム・シュミットの正規直交化法で定める部分集合 $S = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\} \subset V$ は正規直交基底であることが分かる。 □

例 15. 次の部分集合 $S = S(\theta) \subset \mathbb{R}^2$ は正規直交基底である。

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \right\}$$

なぜなら、

$$\begin{aligned}
\left\langle \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \right\rangle &= 1 \\
\left\langle \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \right\rangle &= 0 \\
\left\langle \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \right\rangle &= 1
\end{aligned}$$

ため、$S \subset \mathbb{R}^2$ は正規直交である。特に、$S \subset \mathbb{R}^2$ は 1 次独立であることが分かる。S の個数と $\mathbb{R}^2$ の次元は等しいため、$S \subset \mathbb{R}^2$ は基底であることが成り立つ。すなわち、$S \subset \mathbb{R}^2$ は正規直交基底である。さらに、補題 12 より、ベクトル

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

の基底 $S \subset \mathbb{R}^2$ に関する座標 c_1, c_2 は、次のように表される。

$$\begin{aligned}
c_1 &= \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta \\
c_2 &= \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \right\rangle = -x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta
\end{aligned}$$