11　対称行列と直交行列

内積空間 $(\mathbb{R}^n, \langle -, - \rangle)$ において、次の性質を満たすような部分集合 $S = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ は、正規直交であると呼ばれる。

$$\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

例として、基本基底 $S = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ が、正規直交である。

定義 **1.** (i) ${}^tA = A$ を満たす正方行列 A は、対称行列と呼ばれる。

(ii) n 次の正方行列 P において、P の列ベクトルからなる部分集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ は正規直交であるとき、P が直交行列と呼ばれる。

例 2. (1) 単位行列 E_n は、n 次の対称行列である。

(2) 単位行列 E_n は、n 次の直交行列である。なぜなら、E_n の列ベクトルからなる部分集合は、基本基底 $S = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ と等しい、正規直交である。

(3) 任意の 2 次の対称行列 A は、次のように表される。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

(4) 任意の 2 次の直交行列 P は、次のように表される。

$$P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{または} \qquad P = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

補題 **3.** n 次の正方行列 A に対して、次の性質 (i)–(ii) は、同値である。

(i) A は対称行列である。

(ii) 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して、$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle$ である。

証明. まず、(i) を仮定し、(ii) を示す。一般的に、$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ の内積が、次のように行列積で表される。

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = {}^t\mathbf{u}\,\mathbf{v}$$

特に、

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = {}^t(A\mathbf{x})\,\mathbf{y} = {}^t\mathbf{x}\,{}^tA\,\mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, {}^tA\mathbf{y}\rangle$$

である。

逆に、(ii) を仮定し、(i) を示す。仮定より、特に、

$$a_{ij} = \langle \mathbf{e}_i, A\mathbf{e}_j\rangle = \langle A\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\rangle = a_{ji}$$

が分かる。よって、A は対称行列であることが成り立つ。 □

命題 4. *A を n 次の対称行列、$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ を A の互いに異なる固有値、$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ をそれらに属する固有ベクトルとする。そのとき、任意の $1 \leqslant i < j \leqslant k$ に対して、*

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\rangle = 0$$

である。

証明. 補題 3 を用いて、

$$\lambda_i\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\rangle = \langle \lambda_i\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\rangle = \langle A\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\rangle = \langle \mathbf{v}_i, A\mathbf{v}_j\rangle = \langle \mathbf{v}_i, \lambda_j\mathbf{v}_j\rangle = \lambda_j\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\rangle$$

が分かる。仮定より、$\lambda_i \neq \lambda_j$ なので、$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\rangle = 0$ が成り立つ。 □

例 5. 次の対称行列 A を考えてみる。

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

以下、A の固有値と固有ベクトルを計算する。

A の固有多項式は、

$$\begin{aligned} \chi_A(t) = \det(A - tE) = \det\begin{pmatrix} 9-t & -2 \\ -2 & 6-t \end{pmatrix} = (9-t)(6-t) - 4 \\ = t^2 - 15t + 50 = (t-5)(t-10) \end{aligned}$$

であるため、A の固有値は、$\lambda_1 = 5$ と $\lambda_2 = 10$ である。λ_i に属する固有ベクトル $\mathbf{v}_i$ は、連立 1 次方程式 $(A - \lambda_iE)\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ を満たすゼロでないベクトル $\mathbf{v}_i$ である。計算すると、

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を得る。（任意の $\mathbf{v}_i$ のゼロでないスカラー倍も、λ_i に属する固有ベクトルである。）特に、

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 0$$

である。

補題 6. n 次の正方行列 P に対して、次の性質 (i)–(iv) は同値である。

(i) P は直交行列である。

(ii) 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して、$\|P\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ である。

(iii) 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して、$\langle P\mathbf{x}, P\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ である。

(iv) $({}^tP)\, P = E_n$ である。

証明. P の第 j 列を $\mathbf{p}_j$ とすると、

$$\langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j \rangle = ({}^tP)\, P \text{ の } (i,j) \text{ 成分}$$

であるため、$S = \{\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ が正規直交であることと $({}^tP)\, P = E_n$ であることは同値である。すなわち、(i) と (iv) は同値である。

任意の $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2$$

ため、

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{2}\left(\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2\right)$$

が分かる。よって、(ii) と (iii) は同値であることが成り立つ。

次に、(iii) ならば (i) を示す。(iii) を仮定すると、

$$\langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j \rangle = \langle P\mathbf{e}_i, P\mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle$$

を得る。よって、(i) が成り立つ。

最後に、(i) ならば (ii) を示す。任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$P\mathbf{x} = \mathbf{p}_1 x_1 + \cdots + \mathbf{p}_n x_n$$

である。よって、(i) を仮定すると、

$$\|P\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{p}_1 x_1 + \cdots + \mathbf{p}_n x_n, \mathbf{p}_1 x_1 + \cdots + \mathbf{p}_n x_n \rangle = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = \|\mathbf{x}\|^2$$

を得るため、(ii) が成り立つ。 $\square$

例 7. 補題 6 より、n 次の正方行列 P に対して、P が直交行列であることと ${}^tP$ が直交行列であることは同値である。なぜなら、

$$P \text{ が直交行列} \;\Leftrightarrow\; ({}^tP)\,P = E_n \;\Leftrightarrow\; P^{-1} = {}^tP \;\Leftrightarrow\; P\,({}^tP) = E_n \;\Leftrightarrow\; {}^tP \text{ が直交行列}$$

命題 8. 任意の直交行列 P に対して、次の性質 (i)–(ii) が成り立つ。

(i) $|\det(P)| = 1$ である。

(ii) 任意の P の固有値 λ に対して、$|\lambda| = 1$ である。

証明. (i) $({}^tP)\,P = E$ であるため、$\det(P)^2 = \det(({}^tP)\,P) = \det(E) = 1$ が分かる。

(ii) $\mathbf{v}$ を、固有値 λ に属する固有ベクトルとすると、

$$\lambda^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \langle \lambda\mathbf{v}, \lambda\mathbf{v} \rangle = \langle P\mathbf{v}, P\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$$

を得る。$\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ため、$\lambda^2 = 1$ が分かる。 $\square$

例 9. P を n 次の直交行列とする。以下、$\det(P) = -1$ のとき、$\lambda = -1$ が P の固有値であることを示す。

授業 9 の定理 7 より、$\det(P+E) = 0$ を示せばよい。P は直交行列であるため、

$$({}^tP)(P+E) = ({}^tP)P + ({}^tP)E = E + {}^tP = {}^tE + {}^tP = {}^t(E+P) = {}^t(P+E)$$

が分かる。よって、

$$\begin{aligned} \det(P+E) &= \det({}^t(P+E)) = \det(({}^tP)(P+E)) \\ &= \det({}^tP)\det(P+E) = \det(P)\det(P+E) = -\det(P+E) \end{aligned}$$

を得る。ゆうに、$\det(P+E) = 0$ が成り立つ。