12　対称行列の対角化

任意の正方行列 A は、必ずしも固有値 $\lambda \in \mathbb{R}$ を持たない。例として、

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を考えてみる。このとき、A の固有多項式 $\chi_A(t) = \det(A - tE) = t^2 + 1$ が根 $\lambda \in \mathbb{R}$ を持たないため、A の固有値 $\lambda \in \mathbb{R}$ がないことを得る。

定理 1. 任意の対称行列 A は、固有値 $\lambda \in \mathbb{R}$ を持つ。

証明. n 次の対称行列 A をおいておく。

$$S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\} \subset \mathbb{R}^n$$

を球面、$f\colon S^{n-1} \to \mathbb{R}$ を次のように定める写像とする。

$$f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle$$

S^{n-1} はコンパクトで、f は連続であるため、解析で証明されている定理より、f の最大点 $\mathbf{z} \in S^{n-1}$ が存在することが分かる。すなわち、$\lambda = f(\mathbf{z})$ とすると、任意の $\mathbf{x} \in S^{n-1}$ に対して、$f(\mathbf{x}) \leqslant \lambda$ が分かる。ゆえに、

$$B = A - \lambda E$$

とすると、次の性質 (i)–(iii) が成り立つ。

(i) B は対称行列である。

(ii) $\langle \mathbf{z}, B\mathbf{z} \rangle = 0$ である。

(iii) 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して、$\langle \mathbf{x}, B\mathbf{x} \rangle \leqslant 0$ である。

性質 (i)–(ii) を用いて、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{z} + tB\mathbf{z}, B(\mathbf{z} + tB\mathbf{z}) \rangle &= \langle \mathbf{z}, B\mathbf{z} \rangle + t\langle \mathbf{z}, B^2\mathbf{z} \rangle + t\langle B\mathbf{z}, B\mathbf{z} \rangle + t^2\langle B\mathbf{z}, B^2\mathbf{z} \rangle \\ &= 0 + t\langle B\mathbf{z}, B\mathbf{z} \rangle + t\langle B\mathbf{z}, B\mathbf{z} \rangle + t^2\langle B\mathbf{z}, B^2\mathbf{z} \rangle \\ &= 2t\langle B\mathbf{z}, B\mathbf{z} \rangle + t^2\langle B\mathbf{z}, B^2\mathbf{z} \rangle \end{aligned}$$

を得る。よって、性質 (iii) より、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して、

$$2t\langle B\mathbf{z}, B\mathbf{z}\rangle + t^2\langle B\mathbf{z}, B^2\mathbf{z}\rangle \leqslant 0$$

が分かるため、$\langle B\mathbf{z}, B\mathbf{z}\rangle = 0$ を得る。このとき、$B\mathbf{z} = \mathbf{0}$ を得るため、$A\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z}$ が成り立つ。すなわち、λ は A の固有値であることを示した。 □

定理 2 (対称行列の対角化)**.** 任意の対称行列 A に対して、$P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P が存在する。

証明. 帰納法を用いて、任意の n 次対称行列 A に対して、$P^{-1}AP$ が対角行列となるような n 次直交行列 P が存在することを示す。$n = 1$ のときは自明であるので、$n = r - 1$ のときが正しいを仮定し、$n = r$ のときを示せばよい。定理 1 より、A の固有値 $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ を捕ること ができる。$\mathbf{z}_1$ を $\|\mathbf{z}_1\| = 1$ を満たす λ_1 に属する A の固有ベクトルとし、$\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_r\}$ を $\mathbf{z}_1$ を含む $\mathbb{R}^r$ の正規直交基底とする。このとき、

$$Q = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 & \ldots & \mathbf{z}_r \end{pmatrix}$$

が直交行列であるため、$Q^{-1}AQ$ も対称行列であることが分かる。なぜなら、

$${}^t(Q^{-1}AQ) = {}^tQ\ \ {}^tA\ \ {}^t(Q^{-1}) = Q^{-1}AQ$$

である。さらに、$A\mathbf{z}_1 = \lambda_1\mathbf{z}_1$ であるため、

$$Q^{-1}AQ = \left(\begin{array}{c:ccc} \lambda_1 & c_2 & \cdots & c_r \\ \hdashline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

と表される。ここで、$Q^{-1}AQ$ は対称行列であるため、$c_2 = \cdots = c_r = 0$、B が $r-1$ 次対称行列であることが分かる。ゆえに、帰納法の仮定より、

$$R^{-1}BR = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_r \end{pmatrix}$$

となるような $r-1$ 次直交行列 R が存在することが分かる。よって、

$$P = Q \left(\begin{array}{c:ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & & & \\ \vdots & & R & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

とおくと、P は r 次直交行列で、

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c:ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & & & \\ \vdots & & R^{-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c:ccc} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c:ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & & & \\ \vdots & & R & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c:ccc} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & & & \\ \vdots & & R^{-1}BR & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:ccc} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_r \end{array}\right)$$

が分かる。これで、定理を示した。 □

系 3. n 次対称行列 A に対して、A の固有ベクトルからなる正規直交基底 $S \subset \mathbb{R}^n$ が存在する。

証明. 対称行列の対角化の定理 2 より、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

を満たす n 次直交行列 P が存在することが分かる。それに対して、

$$S = \{P\mathbf{e}_1, P\mathbf{e}_2, \ldots, P\mathbf{e}_n\} \subset \mathbb{R}^n$$

が正規直交基底、$AP\mathbf{e}_i = \lambda_i P\mathbf{e}_i$ であることが成り立つ。 □

例題 4. 次の対称行列 A を直交行列によって対角化せよ。対角化に必要な直交行列 P も記すこと。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

解答. 以下の (1)–(3) で、A の固有ベクトルからなる正規直交基底 $T = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ を計算する。最後に、以下の (4) で、A の直交行列で用いて対角化、対角化に必要な直交行列 P を計算する。

(1) A の固有多項式を計算する。

$$\chi_A(t) = \det(A - tE) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 2 & -1 \\ 2 & -2-t & 2 \\ -1 & 2 & 1-t \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 4-2t & -2t+t^2 \\ 0 & 2-t & 4-2t \\ -1 & 2 & 1-t \end{pmatrix}$$

$$= (2-t)^2 \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & -t \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1-t \end{pmatrix} = (2-t)^2 \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4-t \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1-t \end{pmatrix}$$

$$= (2-t)^2(-4-t) \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1-t \end{pmatrix} = (2-t)^2(-4-t)$$

これから、A の固有値は 2 と -4 であることが分かる。

(2) A の固有値 2 と -4 に属する固有空間 $\ker(A-2E)$ と $\ker(A+4E)$ を計算する。$A-2E$ を簡約化した行列 B を計算すると、

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を得るため、

$$(A-2E)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

が分かる。よって、

$$\ker(A-2E)=\left\{c_1\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\mid c_1,c_2\in\mathbb{R}\right\}$$

が成り立つ。同様に、$A+4E$ の簡約化 C を計算すると、

$$A+4E=\begin{pmatrix}5&2&-1\\2&3&2\\-1&2&5\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

を得るため、

$$(A+4E)\mathbf{x}=\mathbf{0}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x_1\qquad - x_3=0\\ \qquad x_2+2x_3=0\end{cases}$$

が分かる。よって、

$$\ker(A+4E)=\left\{c\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\mid c\in\mathbb{R}\right\}$$

が成り立つ。

(3) グラム・シュミットの正規直交化法（授業 10 の命題 13）で、基底

$$S_2=\left\{\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\subset\ker(A-2E)$$

$$S_{-4}=\left\{\mathbf{w}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}\subset\ker(A+4E)$$

を正規直交化した基底 $T_2 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ と $T_{-4} = \{\mathbf{u}_3\}$ を計算する。

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{v}_2'}{\|\mathbf{v}_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

これで、A の固有ベクトルからなる正規直交基底 $T = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ を計算した。

(4) P を、直交行列

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & -2/\sqrt{6} \\ 0 & 5/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

とすると、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

であることが分かる。なぜなら、$P^{-1}AP$ は、基底 $T = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} \subset \mathbb{R}$ に関する

$$F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

で定める線形写像 $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ の表現行列である。

□