

3 基底と次元

定義 1. ベクトル空間 V において、 V が有限個のベクトルからなる部分集合 $T \subset V$ で生成されるとき、 V は**有限次元**ベクトル空間と呼ばれる。

例 2. (1) ゼロ空間 $\{0\}$ は零個のベクトルからなる空集合 $\emptyset \subset \{0\}$ で生成されるので、有限次元であることが分かる。

(2) ユークリッド空間 \mathbb{R}^n は、基本ベクトルからなる部分集合 $S = \{e_1, \dots, e_n\}$ で生成されるので、有限次元であることが分かる。

命題 3. ベクトル空間 V とその部分空間 $W \subset V$ に対して、 V は有限次元なら、 W も有限次元である。

証明. V は有限次元であるため、有限個のベクトルからなる部分集合 $T = \{v_1, \dots, v_h\} \subset V$ で生成される。今、 $W \subset V$ を、有限次元でない部分空間とする。以下、任意の $k \geq 0$ に対して、 k 個のベクトルからなる 1 次独立である部分集合 $S = \{u_1, u_2, \dots, u_k\} \subset W$ が存在することを示す。しかし、授業 2 の命題 9 より、 V は h 個以上のベクトルからなる 1 次独立である部分集合を持たないことが分かる。よって、このような有限次元でない部分空間 $W \subset V$ が存在しないことが成り立つ。

今、帰納法を用いて、任意の $k \geq 0$ に対して、 k 個のベクトルからなる 1 次独立である部分集合 $S = \{u_1, u_2, \dots, u_k\} \subset W$ が存在することを示す。まず、 $k = 0$ のときは自明なので、 $k = n - 1$ のときを正しいとし、 $k = n$ のときを示せばよい。 $W' \subset W$ を、 $n - 1$ 個のベクトルからなる 1 次独立である部分集合 $S' = \{u_1, \dots, u_{n-1}\}$ で生成される部分空間とする。 W は有限次元でない仮定より、 $W' \neq W$ が分かる。以下、任意の $u_n \in W \setminus W'$ に対して、

$$S = \{u_1, \dots, u_{n-1}, u_n\} \subset W$$

は 1 次独立であることを示す。1 次関係

$$c_1 u_1 + \dots + c_{n-1} u_{n-1} + c_n u_n = 0$$

をおいておく。まず、 $c_n \neq 0$ のとき、

$$u_n = -\frac{1}{c_n}(c_1 u_1 + \dots + c_{n-1} u_{n-1}) \in W'$$

を得るため、 $c_n = 0$ が分かる。なぜなら、 $\mathbf{u}_n \notin W'$ である。 $S' \subset W$ は 1 次独立であるため、

$$c_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + c_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} = \mathbf{0}$$

から、 $c_1 = 0, \dots, c_{n-1} = 0$ も分かる。よって、 $S \subset W$ は 1 次独立であることを示した。これで命題を示した。□

例 4. ユークリッド空間 \mathbb{R}^n は有限次元であるため、命題 3 より、任意の部分空間 $W \subset \mathbb{R}^n$ も有限次元であることが分かる。

有限次元ベクトル空間 V をおいておく。部分集合 $S = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\} \subset V$ は、 V を生成するとき、定義より、任意のベクトル $\mathbf{v} \in V$ は、次のような 1 次結合で表される。

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + c_n \mathbf{u}_n \quad (c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R})$$

一般的に、スカラー c_1, \dots, c_n は、ベクトル \mathbf{v} で決定されていない。しかし、 $S \subset V$ が 1 次独立であるとき、

$$c_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + c_n \mathbf{u}_n = d_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + d_n \mathbf{u}_n$$

から、

$$(c_1 - d_1) \mathbf{u}_1 + \cdots + (c_n - d_n) \mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

を得るため、 $c_1 = d_1, \dots, c_n = d_n$ が分かる。よって、 S が 1 次独立であるとき、スカラー c_1, \dots, c_n は、ベクトル \mathbf{v} で決定されている。

定義 5. 有限次元ベクトル空間 V をおいておく。

- (1) 全空間 V を生成し、1 次独立である部分集合 $S = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\} \subset V$ は、**基底** と呼ばれる。
- (2) 基底 $S = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\} \subset V$ と $\mathbf{v} = c_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + c_n \mathbf{u}_n$ で表されているベクトルにおいて、スカラー c_1, \dots, c_n は、 $\mathbf{v} \in V$ の**基底 S に関する座標** と呼ばれる。

例 6. (1) ユークリッド空間 \mathbb{R}^2 に関して、ベクトル

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

からなる部分集合 $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \subset \mathbb{R}^2$ は、基底である。なぜなら、任意のベクトル

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

が、一意的に $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$ で表される。基底 $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \subset \mathbb{R}^2$ は、ユークリッド空間 \mathbb{R}^2 の**基本基底**とよばれ、基本基底に関する座標 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は、 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ の**基本座標**と呼ばれる。

(2) ユークリッド空間 \mathbb{R}^2 に関して、ベクトル

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

からなる部分集合 $T = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \subset \mathbb{R}^2$ は、基底でもある。なぜなら、任意のベクトル

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

が、一意的に $\mathbf{x} = (-x_1 + x_2)\mathbf{u}_1 + (-2x_1 + x_2)\mathbf{u}_2$ で表される。よって、ベクトル \mathbf{x} の基底 T に関する座標は、 $c_1 = -x_1 + x_2$ と $c_2 = -2x_1 + x_2$ であることが分かる。

定理 7. 有限次元ベクトル空間 V をおいておく。

(1) 基底 $S = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\} \subset V$ が存在する。

(2) 二つの基底 $S = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}, T = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \subset V$ に対して、必ず $m = n$ である。

証明. (1) V は有限次元なので、有限個のベクトルからなる部分集合 $T = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h\} \subset V$ で生成される。

$$S = \{\mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{v}_{i_n}\} \subset T$$

を、 T の 1 次独立であるような最大部分集合とする。 S が V を生成しないことを仮定すると、 S に含まれているベクトルの 1 次結合で表さないベクトル $\mathbf{v}_j \in T$ が存在する。以下、 $S' = \{\mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{v}_{i_n}, \mathbf{v}_j\}$ は 1 次独立であることを示す。しかし、それは S の最大性に矛盾するため、 S が V を生成することが分かる。よって、 S は V の基底であることが成り立つ。

今、 S' は 1 次独立であることを示す。ある 1 次関係

$$c_1\mathbf{v}_{i_1} + \dots + c_n\mathbf{v}_{i_n} + c_{n+1}\mathbf{v}_j = \mathbf{0}$$

に対して、 $c_{n+1} \neq 0$ のとき、 \mathbf{v}_j が次のような 1 次結合で表される。

$$\mathbf{v}_j = -\frac{1}{c_{n+1}}(c_1\mathbf{v}_{i_1} + \cdots + c_n\mathbf{v}_{i_n})$$

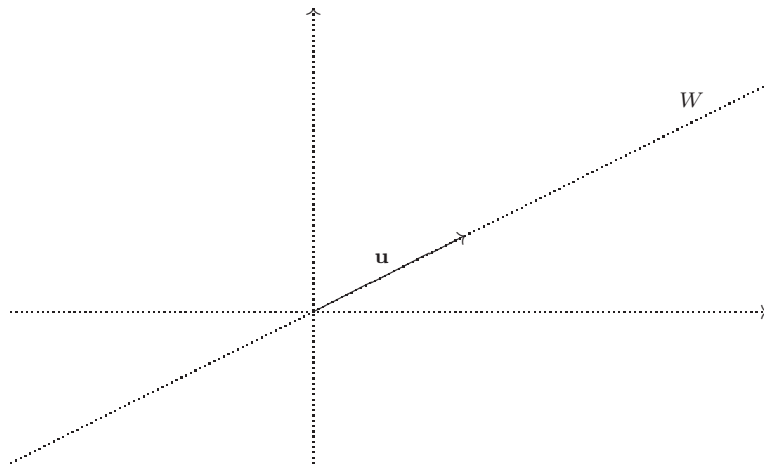
しかし、 \mathbf{v}_j が S に含まれているベクトルの 1 次結合で表さないより、 $c_{n+1} = 0$ が分かる。 S は 1 次独立であるため、 $c_1 = 0, \dots, c_n = 0$ も分かる。よって、 S' は 1 次独立であることを示した。

(2) 授業 2 の命題 9 を用いて、 $m \leq n$ と $n \leq m$ を示す。まず、 S は 1 次独立、 T は V を生成するため、 $m \leq n$ を得る。同様に、 T は 1 次独立、 S は V を生成するので、 $n \leq m$ が分かる。よって、 $m = n$ を示した。 \square

定義 8. 有限次元ベクトル空間 V において、任意の基底 $S = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\} \subset V$ の個数 n は、 V の **次元** と呼ばれ、 $\dim(V) = n$ と書かれる。

例 9. (1) ゼロ空間 $\{\mathbf{0}\}$ に関して、空集合 $\emptyset \subset \{\mathbf{0}\}$ は基底であるので、 $\dim(\{\mathbf{0}\}) = 0$ である。

(2) ユークリッド空間 \mathbb{R}^2 に関して、一つのゼロでないベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ からなる部分集合 $S = \{\mathbf{u}\} \subset \mathbb{R}^2$ は、1 次独立で、部分空間 $W = \{c\mathbf{u} \mid c \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ の基底となる。



よって、 $\dim(W) = 1$ である。

(3) ユークリッド空間 \mathbb{R}^n に関して、基本基底 $S = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ の個数が n なので、 $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ である。