

4 部分空間と次元

ベクトル空間の基底について、次のより正確な定理を示す。

定理 1. V を有限次元ベクトル空間、 $S \subset V$ を 1 次独立である部分集合、 $S \subset T \subset V$ を V を生成する部分集合とする。そのとき、 V は $S \subset B \subset T$ を満たす基底 B を持つ。

証明. B を、1 次独立で、 $S \subset B \subset T$ を満たすような最大の部分集合とし、 $W \subset V$ を B で生成される部分空間とする。このとき、 $W = V$ であることを示せばよい。 $W \neq V$ を仮定すると、 W に含まれていないベクトル $\mathbf{v} \in T$ が存在し、 $B' = B \cup \{\mathbf{v}\} \subset V$ は 1 次独立である。しかし、これは B の最大性に矛盾するため、 $W = V$ が分かる。

以下、 B' は 1 次独立であることを示す。まず、 V は有限次元であるため、授業 2 の命題 9 より、 B は有限であることが分かる。ここで、 $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ とおくと、 B' は、

$$B' = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}\}$$

で表される。さて、ある 1 次関係

$$c_1 \mathbf{u}_1 + \dots + c_n \mathbf{u}_n + c \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

に対して、 $c \neq 0$ のとき、

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{c}(c_1 \mathbf{u}_1 + \dots + c_n \mathbf{u}_n) \in W$$

が成り立つ。よって、 $\mathbf{v} \notin W$ 仮定より、 $c = 0$ が分かる。さらに、 B は 1 次独立であるため、 $c_1 = 0, \dots, c_n = 0$ も分かる。すなわち、 B' は 1 次独立であることを示した。□

系 2. 有限次元ベクトル空間 V をおいておく。

- (i) V を生成する部分集合 $T = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h\} \subset V$ に対して、 T が V の基底であることと T の個数 h が $\dim(V)$ と等しいことは同値である。
- (ii) 1 次独立である部分集合 $S = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\} \subset V$ に対して、 S が V の基底であることと S の個数 k が $\dim(V)$ と等しいことは同値である。

証明. V の次元を $n = \dim(V)$ とする。

(i) $T \subset V$ が基底であるとき、授業 3 の定理 7 の (2) より、 $h = n$ が成り立つ。 $T \subset V$ が基底でないとき、定理 1 より、 T に含まれている基底 $B = \{\mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{v}_{i_n}\} \subset V$ が存在することが分かる。よって、 $n < h$ を得る。

(ii) $S \subset V$ が基底であるとき、授業 3 の定理 7 の (2) より、 $k = n$ が成り立つ。 $S \subset V$ が基底でないとき、定理 1 より、 S を含む基底 $B \subset V$ が存在することが分かる。よって、 $k < n$ を得る。 $\square$

定義 3. ベクトル空間 V とその部分空間 $W_1, W_2 \subset V$ において、部分空間

$$W_1 + W_2 = \{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in V \mid \mathbf{w}_1 \in W_1 \text{ かつ } \mathbf{w}_2 \in W_2\} \subset V$$

は、 W_1 と W_2 の和と呼ばれる。

注 4. ベクトル空間 V とその部分空間 $W_1, W_2 \subset V$ に対して、練習問題その 4 の問題 1 より、部分集合 $W_1 \cap W_2, W_1 + W_2 \subset V$ は、部分空間である。

命題 5. 有限次元ベクトル空間 V とその部分空間 $W_1, W_2 \subset V$ に対して、

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$$

である。

証明. $W_1, W_2, W_1 \cap W_2$ の次元をそれぞれ m, n, p とし、 $W_1 \cap W_2$ の基底 $S = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ をおいておく。定理 1 より、 W_1 と W_2 に対して、次のような基底が存在する。

$$S_1 = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{m-p}\} \subset W_1$$

$$S_2 = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{n-p}\} \subset W_2$$

このとき、 $T = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{m-p}, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{n-p}\}$ は、 $W_1 + W_2$ の基底であるため、

$$\begin{aligned} \dim(W_1 + W_2) &= p + (m - p) + (n - p) = m + n - p \\ &= \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2) \end{aligned}$$

が分かる。

以下、 T は、 $W_1 + W_2$ の基底であることを示す。

まず、 T は $W_1 + W_2$ を生成することを示す。任意の $\mathbf{w} \in W$ は、

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \quad (\mathbf{w}_1 \in W_1, \mathbf{w}_2 \in W_2)$$

で表される。さらに、 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ は、次のような 1 次結合で表される。

$$\mathbf{w}_1 = a_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + a_p \mathbf{u}_p + b_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + b_{m-p} \mathbf{x}_{m-p}$$

$$\mathbf{w}_2 = a'_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + a'_p \mathbf{u}_p + c_1 \mathbf{y}_1 + \cdots + c_{n-p} \mathbf{y}_{n-p}$$

よって、 $\mathbf{w}$ は、

$$\mathbf{w} = (a_1 + a'_1) \mathbf{u}_1 + \cdots + (a_p + a'_p) \mathbf{u}_p + b_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + b_{m-p} \mathbf{x}_{m-p} + c_1 \mathbf{y}_1 + \cdots + c_{n-p} \mathbf{y}_{n-p}$$

で表されるため、 T は $W_1 + W_2$ を生成することが成り立つ。

次に、 T は 1 次独立であることを示す。ある 1 次関係

$$a_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + a_p \mathbf{u}_p + b_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + b_{m-p} \mathbf{x}_{m-p} + c_1 \mathbf{y}_1 + \cdots + c_{n-p} \mathbf{y}_{n-p} = \mathbf{0}$$

に対して、

$$a_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + a_p \mathbf{u}_p + b_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + b_{m-p} \mathbf{x}_{m-p} \in W_1$$

$$a_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + a_p \mathbf{u}_p + b_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + b_{m-p} \mathbf{x}_{m-p} = -(c_1 \mathbf{y}_1 + \cdots + c_{n-p} \mathbf{y}_{n-p}) \in W_2$$

であるため、

$$a_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + a_p \mathbf{u}_p + b_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + b_{m-p} \mathbf{x}_{m-p} \in W_1 \cap W_2$$

が分かる。しかし、 S は $W_1 \cap W_2$ の基底であるより、 $b_1 = 0, \dots, b_{m-p} = 0$ が分かる。同様に、 $c_1 = 0, \dots, c_{n-p} = 0$ を得る。よって、

$$a_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + a_p \mathbf{u}_p = \mathbf{0}$$

が成り立つ。 S は 1 次独立であるため、 $a_1 = 0, \dots, a_p = 0$ が分かる。これで、 T は 1 次独立であることを示した。□

定義 6. 有限次元 n のベクトル空間 V とその部分空間 $W \subset V$ をおいておく。

- (i) $\dim(W) = 1$ のとき、 W は V の **直線** と呼ばれる。
- (ii) $\dim(W) = 2$ のとき、 W は V の **平面** と呼ばれる。
- (iii) $\dim(W) = n - 1$ のとき、 W は V の **超平面** と呼ばれる。

例 7. V を $\mathbb{R}^3$ とし、 $W_1, W_2 \subset V$ を平面とする。このとき、

$$W_1 \subset W_1 + W_2 \subset V$$

であるため、

$$2 \leq \dim(W_1 + W_2) \leq 3$$

を得る。命題 5 より、

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2) = 4 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

がわかるので、

$$1 \leq \dim(W_1 \cap W_2) \leq 2$$

が成り立つ。すなわち、 $W_1 \cap W_2$ は、 V の直線または平面であることが分かる。