# 線形代数II・中間試験（11月24日）

| ふりがな | |
|---|---|
| 氏名 | 解答 |

| 学生番号 | |
|---|---|

| | |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 計 | |

問題 1 (20 点). $W$ を $n$ 次元ベクトル空間とし、$S \subset W$ を $m$ 個のベクトルからなる部分集合とする。次の命題が正しくなるように (a)(b)(c) の中から選べ。

(1) $S$ が $W$ を生成するとき、必ず

(a) $m \geqslant n$ である、　(b) $m \leqslant n$ である、　(c) $m = n$ である。

(2) $S$ が 1 次独立であるとき、必ず

(a) $m \geqslant n$ である、　(b) $m \leqslant n$ である、　(c) $m = n$ である。

(3) $S$ が $W$ の基底であるとき、必ず

(a) $m \geqslant n$ である、　(b) $m \leqslant n$ である、　(c) $m = n$ である。

(1)　(a) は正しい。

(2)　(b) は正しい。

(3)　(a), (b), (c) は正しい。

問題 2 (20 点). $S \subset \mathbb{R}^3$ を、次のように定める部分集合とする。

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

次の各問いに答えよ。

(1) $S$ は 1 次独立であることを示せ。

(2) $S$ を含む $\mathbb{R}^3$ の基底 $T$ を求めよ。

(1) 任意の 1 次関係

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

に対して、$c_1 = 0$ と $c_2 = 0$ を得るため、$S \subset \mathbb{R}^3$ は 1 次独立であることが成り立つ。

(2) $T$ を、

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

とすると、$T$ は 1 次独立である。なぜなら、

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

のとき、必ず $c_1 = 0$、$c_2 = 0$、$c_3 = 0$ である。さらに、$T$ の個数は $\mathbb{R}^3$ の次元と等しいため、$T$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であることが分かる。

問題 3 (20 点). $V \subset \mathbb{R}^3$ を、次のように定める部分空間とする。

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

$F\colon V \to \mathbb{R}^2$ を、次のように定める線形写像とする。

$$F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

次の各問いに答えよ。

(1) $V$ の基底 $R$ を求めよ。

(2) $F$ の基底 $R$ と基本基底 $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ に関する表現行列 $A$ を求めよ。

(3) $F$ の逆写像 $F^{-1}$ の基本基底 $S$ と基底 $R$ に関する表現行列 $B$ を求めよ。

(1) $$R = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

(2) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(3) $$B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

問題 4 (20 点). $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を、次のように定める線形写像とする。

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 4x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

$R = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \subset \mathbb{R}^3$, $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \subset \mathbb{R}^2$ を基本基底、$R' \subset \mathbb{R}^3$, $S' \subset \mathbb{R}^2$ を次のように定める基底とする。

$$R' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}, \qquad S' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ と $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を、それぞれ $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ と $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$ で定義される線形写像とする。次の各問いに答えよ。

(1) $F$ の基底 $R$ と $S$ に関する表現行列 $A$ を求めよ。

(2) 恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ の基底 $R'$ と $R$ に関する表現行列 $P$ を求めよ。

(3) 恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の基底 $S'$ と $S$ に関する表現行列 $Q$ を求めよ。

(4) $F$ の基底 $R'$ と $S'$ に関する表現行列 $B$ を求めよ。

(1) $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $\quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $\quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $\quad B = Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -9 \\ 1 & -7 & 20 \end{pmatrix}$

問題 5 (20 点). $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を、次のように定義される線形写像とする。

$$F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ を基本基底、$S' \subset \mathbb{R}^3$ を次のように定める基底とする。

$$S' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を、$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ で定める線形写像とする。次の各問いに答えよ。

(1) 恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ の基底 $S'$ と $S$ に関する表現行列 $P$ を求めよ。

(2) $F$ の基底 $S'$ と $S'$ に関する表現行列 $B$ を求めよ。

(1) $$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $$B = P^{-1}AP = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$