練習問題その１２ (解答)

問題 1. まず、(i) ならば (ii) をしめす。仮定 (i) より、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と表される。よって、

$$P^{-1}AP\mathbf{e}_j = \lambda_j \mathbf{e}_j$$

が分かる。すなわち、

$$AP\mathbf{e}_j = P(\lambda_j \mathbf{e}_j) = \lambda_j P\mathbf{e}_j$$

を得る。$P\mathbf{e}_j$ は P の第 j 列ベクトルなので、(ii) が成り立つ。

次に、(ii) ならば (i) を示す。P の列ベクトルは A の固有ベクトルであるため、任意の $1 \leqslant j \leqslant n$ に対して、

$$AP\mathbf{e}_j = \lambda_j P\mathbf{e}_j \qquad (\lambda_j \in \mathbb{R})$$

が分かる。よって、任意の $1 \leqslant j \leqslant n$ に対して、

$$P^{-1}AP\mathbf{e}_j = \lambda_j \mathbf{e}_j$$

を得る。すなわち、(i) が成り立つ。

問題 2. 以下の (1)–(4) で $P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P を計算する。

(1) A の固有多項式 $\chi_A(t) = \det(A - tE)$ を計算する。

$$\chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 1 & 0 & -t \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-t^2 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 1 & 0 & -t \end{pmatrix}$$
$$= -(1-t)(1-t^2) = (1-t)^2(-1-t)$$

ゆえに、A の固有値は 1 と -1 であることを得る。

(2) 固有空間 $\ker(A-E)$ と $\ker(A+E)$ を計算する。$A-\lambda E$ の簡約化を B_λ とおくと、

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を得る。すなわち、

$$\begin{aligned} (A-E)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad &\Leftrightarrow \quad x_1 - x_3 = 0 \\ (A+E)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 = 0 \\ \phantom{x_1 +{}} x_2 \phantom{{}+x_3} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

であるため、

$$\ker(A-E) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\ker(A+E) = \left\{ c \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}$$

を得る。

(3) グラム・シュミットの正規直交化方を用いて、基底

$$S_1 = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \ker(A-E)$$

$$S_{-1} = \left\{ \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \ker(A+E)$$

の正規直交化 $T_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \subset \ker(A - E)$ と $T_{-1} = \{\mathbf{u}_3\} \subset \ker(A + E)$ を計算する。

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{v}_2'}{\|\mathbf{v}_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(4) ゆえに、問題 1 より、正方行列

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

は直交行列で、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を満たすことが分かる。

問題 3. 以下の (1)–(4) で $P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P を計算する。

(1) A の固有多項式 $\chi_A(t) = \det(A - tE)$ を計算する。

$$\begin{aligned} \chi_A(t) &= \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ 1 & 2-t & 1 \\ 0 & 1 & 1-t \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 0 & 1-(1-t)(2-t) & -(1-t) \\ 1 & 2-t & 1 \\ 0 & 1 & 1-t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \det\begin{pmatrix} 0 & -(1-t)(2-t) & -2(1-t) \\ 1 & 2-t & 1 \\ 0 & 1 & 1-t \end{pmatrix} \\
&= -(1-t)\det\begin{pmatrix} 0 & 2-t & 2 \\ 1 & 2-t & 1 \\ 0 & 1 & 1-t \end{pmatrix} \\
&= -(1-t)\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2-(2-t)(1-t) \\ 1 & 2-t & 1 \\ 0 & 1 & 1-t \end{pmatrix} \\
&= -(1-t)\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & t(3-t) \\ 1 & 2-t & 1 \\ 0 & 1 & 1-t \end{pmatrix} \\
&= -t(1-t)(3-t)\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2-t & 1 \\ 0 & 1 & 1-t \end{pmatrix} \\
&= -t(1-t)(3-t)
\end{aligned}
$$

ゆえに、A の固有値は $0, 1, 3$ であることを得る。

(2) 固有空間 $\ker(A-\lambda E)$ を計算する。$A-\lambda E$ の簡約化を B_λ とおくと、

$$
B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

を得る。よって、

$$
\begin{aligned}
A\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 \qquad - x_3 = 0 \\ \qquad x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \\
(A-E)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 \qquad + x_3 = 0 \\ \qquad x_2 \qquad = 0 \end{cases} \\
(A-3E)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 \qquad - x_3 = 0 \\ \qquad x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

であるため、

$$\ker(A) = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\ker(A-E) = \left\{ c \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\ker(A-3E) = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}$$

(3) グラム・シュミットの正規直交化法を用いて、基底

$$S_0 = \left\{ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \ker(A), \qquad S_1 = \left\{ \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \ker(A-E)$$

$$S_3 = \left\{ \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \ker(A-3E)$$

の正規直交基底 $T_0 = \{\mathbf{u}_1\}$, $T_1 = \{\mathbf{u}_2\}$, $T_3 = \{\mathbf{u}_3\}$ を計算する。

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(4) ゆえに、問題 1 より、正方行列

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

は直交行列で、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

を満たすことが分かる。

問題 4. $P^{-1}AP$ は対角行列 D と等しいことを示す直交行列 P が存在とき、

$${}^tA = {}^t(PDP^{-1}) = {}^t(P^{-1})\,{}^tD\,{}^tP = PDP^{-1} = A$$

が分かる。すなわち、A は対称行列であることを示した。