

## 練習問題その3 (解答)

問題 1. (i)  $1 \cdot \mathbf{u} + (-1) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$ .

(ii)  $1 \cdot \mathbf{0} + 0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$ .

(iii)  $1 \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + (-1) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) + (-2) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

問題 2. ある 1 次関係  $c_1(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + c_2(\mathbf{v} + \mathbf{w}) + c_3(\mathbf{w} + \mathbf{u}) = \mathbf{0}$  から、次のような 1 次関係が成り立つ。

$$(c_1 + c_3)\mathbf{u} + (c_1 + c_2)\mathbf{v} + (c_2 + c_3)\mathbf{w} = \mathbf{0}$$

$S = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$  は 1 次独立であるため、 $c_1 + c_3 = 0$ ,  $c_1 + c_2 = 0$ ,  $c_2 + c_3 = 0$  であることが分かる。このとき、必ず  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 0$ ,  $c_3 = 0$  であるため、 $S' = \{\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{w} + \mathbf{u}\}$  は 1 次独立であることが示された。

問題 3.  $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset W$  は基底で、 $T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset W$  は基底でもある。

問題 4.  $m = \dim(V)$ ,  $n = \dim(W)$  とする。

(i)  $V$  は  $m$  個のベクトルからなる部分集合で生成されるため、授業 2 の命題 9 より、 $m$  個以上のベクトルからなる 1 次独立である部分集合を含まないことが分かる。 $W$  の基底  $S \subset W$  は、 $n$  個のベクトルからなる 1 次独立で、 $V$  に含まれているため、 $n \leq m$  を得る。

(ii)  $W$  の基底  $S = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\} \subset W$  をおいておく。 $W \neq V$  を仮定すると、 $W$  に含まれていない  $\mathbf{u}_{n+1} \in V$  が存在する。以下、 $S' = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{n+1}\} \subset V$  は 1 次独立である。しかし、 $V$  は、 $n$  個以上のベクトルからなる 1 次独立である部分集合を含まないため、 $W = V$  であることが成り立つ。

今、 $S'$  は 1 次独立であることを示す。任意の 1 次関係

$$c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_n\mathbf{u}_n + c_{n+1}\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{0}$$

に対して、 $c_{n+1} \neq 0$  のとき、

$$\mathbf{u}_{n+1} = -\frac{1}{c_{n+1}}(c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_n\mathbf{u}_n) \in W$$

を得る。しかし、 $\mathbf{u}_{n+1} \notin W$  より、 $c_{n+1} = 0$  が分かる。さらに、 $S$  は 1 次独立であるため、 $c_1 = 0, \dots, c_n = 0$  も分かる。よって、 $S'$  は 1 次独立であることを示した。