

練習問題その5 (解答)

問題 1. F は全単射なので、「 $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ 」と「 $F(\mathbf{u}) = F(\mathbf{v})$ 」は同値である。以下、 F^{-1} が定義 1 の性質 (1)–(2) を満たすことを示す。

(1) 「 $F^{-1}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = F^{-1}(\mathbf{u}_1) + F^{-1}(\mathbf{u}_2)$ 」と「 $F(F^{-1}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)) = F(F^{-1}(\mathbf{u}_1) + F^{-1}(\mathbf{u}_2))$ 」は同値である。ここで、 $F(F^{-1}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ で、 F が線形写像であるため、

$$F(F^{-1}(\mathbf{u}_1) + F^{-1}(\mathbf{u}_2)) = F(F^{-1}(\mathbf{u}_1)) + F(F^{-1}(\mathbf{u}_2)) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

である。よって、性質 (1) を示した。

(2) 「 $F^{-1}(c\mathbf{u}) = cF^{-1}(\mathbf{u})$ 」と「 $F(F^{-1}(c\mathbf{u})) = F(cF^{-1}(\mathbf{u}))$ 」は同値である。今、

$$F(F^{-1}(c\mathbf{u})) = c\mathbf{u} = cF(F^{-1}(\mathbf{u})) = F(cF^{-1}(\mathbf{u}))$$

であるので、性質 (2) が成り立つ。

問題 2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

問題 3. 基底

$$R = \left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad S = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

に関する恒等写像 $\text{id}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ の表現行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

の成分は、次の方程式で決定される。

$$\text{id}(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1 = a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2$$

$$\text{id}(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2 = a_{12}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2$$

よって、

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

が成り立つ。

問題 4. 基底 R と S に含まれているベクトルを、

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

とすると、表現行列 A の成分は、次の方程式で決定される。

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u}_1) &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \\ F(\mathbf{u}_2) &= \begin{pmatrix} 12 \\ 17 \end{pmatrix} = a_{12}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \\ F(\mathbf{u}_3) &= \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = a_{13}\mathbf{v}_1 + a_{23}\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

以上の連立 1 次方程式を解くと、

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

を得る。