練習問題その６ (解答)

問題 1. (i) 恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ の基底 $S \subset \mathbb{R}^2$ と $R \subset \mathbb{R}^2$ に関する表現行列を、A する。

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1 = 2\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2$$
$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2 = 3\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2$$

ため、表現行列の定義より、

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

を得る。

(ii) 恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ の基底 $R \subset \mathbb{R}^2$ と $S \subset \mathbb{R}^2$ に関する表現行列を、B する。例 1 より、$B = A^{-1}$ であることが分かる。よって、

$$B = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

が成り立つ。

問題 2. (i) 表現行列の定義より、

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

を得る。

(ii)

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[rrr, dotted, bend left, "A"] & & & S \\
& \mathbb{R}^3 \arrow[r, "F"] & \mathbb{R}^2 & \\
& \mathbb{R}^3 \arrow[r, "F"] \arrow[u, "\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}"'] & \\
R' \arrow[uuu, dotted, bend left, "P"] \arrow[rrr, dotted, bend right, "B"'] & & & S' \arrow[uuu, dotted, bend right, "Q"']
\end{tikzcd}$$

(iii) 以上の図式考えると、$QB = AP$ が分かるので、

$$B = Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

が成り立つ。

問題 3. (i) 表現行列の定義より、

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

が分かる。

(ii)

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[rrr, dotted, bend left, "A"] & & & S \\
& \mathbb{R}^3 \arrow[r, "F"] & \mathbb{R}^3 & \\
& \mathbb{R}^3 \arrow[r, "F"] \arrow[u, "\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[u, "\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}"'] & \\
S' \arrow[uuu, dotted, bend left, "P"] \arrow[rrr, dotted, bend right, "B"'] & & & S' \arrow[uuu, dotted, bend right, "P"']
\end{tikzcd}$$

(iii) 以上の図式考えると、$PB = AP$ が分かるので、$B = P^{-1}AP$ である。P^{-1} を掃き出し法で計算すると、

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -15 & -18 \\ 8 & 13 & 14 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

を得る。

問題 4. 表現行列の定義と以下の計算から、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が分かる。

$$\begin{aligned} F(1) = 1 \quad &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^4 \\ F(x) = x + 1 \quad &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^4 \\ F(x^2) = (x+1)^2 \quad &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^4 \\ F(x^3) = (x+1)^3 \quad &= 1 \cdot 1 + 3 \cdot x + 3 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^4 \\ F(x^4) = (x+1)^4 \quad &= 1 \cdot 1 + 4 \cdot x + 6 \cdot x^2 + 4 \cdot x^3 + 1 \cdot x^4 \end{aligned}$$

以上、$1 \in \mathbb{R}[x]_4$ は、定数多項式 $f(x) = 1$ であるため、$F(1) = 1$ である。

注 5. 問題 4 で於ける線形写像 F の逆写像 F^{-1} は、次のように与えられる。

$$F^{-1}(f(x)) = f(x-1)$$

さらに、F^{-1} の基底 $S \subset \mathbb{R}[x]_4$ と $\mathbb{R}[x]_4$ に関する表現行列は、A^{-1} であるため、

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が分かる。