練習問題その９ (解答)

問題 1. (i) 帰納法を用いて、λ^k が F^k の固有値であることを示す。$k=1$ のときは自明なので、$k=r-1$ のときを正しいと仮定し、$k=r$ のときを示せばよい。さて、$\mathbf{u}$ を λ に属する固有ベクトルとすると、

$$F^r(\mathbf{u}) = F^{r-1}(\lambda\mathbf{u}) = \lambda F^{r-1}(\mathbf{u}) = \lambda(\lambda^{r-1}\mathbf{u}) = \lambda^r\mathbf{u}$$

ため、命題が成り立つ。

(ii) λ を F の固有値とすると、(i) より、λ^k が F^k の固有値であることが分かる。$F^k = \mathbf{0}$ ため、$\lambda^k = 0$ を得るため、$\lambda = 0$ が成り立つ。

(iii) $\lambda \neq 0$ のとき、(ii) より、λ は F の固有値ではないので、$\ker(F - \lambda\,\mathrm{id})$ はゼロ空間であることが分かる。すなわち、$F - \lambda\,\mathrm{id}$ は単射である。このとき、

$$\mathrm{rank}(F - \lambda\,\mathrm{id}) = \dim(V) - \mathrm{null}(F - \lambda\,\mathrm{id}) = \dim(V)$$

ため、$F - \lambda\,\mathrm{id}$ も全射であることが分かる。

問題 2. (i) $\chi_F(t) = \det\begin{pmatrix} -1-t & 0 & -2 \\ 3 & 2-t & 2 \\ 1 & -1 & 3-t \end{pmatrix} = (2-t)(1-t)^2$

(ii) 定理 7 より、F の固有値は $\lambda = 1$ と $\lambda = 2$ である。

(iii) 計算すると、

$$\ker(F - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \left\{ c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$\ker(F - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \left\{ c\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}$$

を得る。特に、$\mathbb{R}^3$ が F の固有ベクトルからなる基底を持たない。

問題 3. F_a の固有多項式は、

$$\chi_{F_a}(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 & a \\ 0 & 2-t & a \\ 0 & 0 & a-t \end{pmatrix} = (1-t)(2-t)(a-t)$$

である。$a \neq 1$ かつ $a \neq 2$ のとき、$\lambda = 1$、$\lambda = 2$ と $\lambda = a$ は三つの互いに異なる固有値なので、系 10 より、$\mathbb{R}^3$ が F_a の固有ベクトルからなる基底を持つ。計算すると、

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1, \qquad \mathbf{u}_2 = \mathbf{e_1} + \mathbf{e}_2, \qquad \mathbf{u}_a = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a-2 \end{pmatrix}$$

は、それぞれ $\lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = a$ に属する固有ベクトルであることを得る。

$a = 1$ のとき、$\lambda = 1$ と $\lambda = 2$ が全ての固有値である。計算すると、$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ は $\lambda = 1$ に属する固有ベクトル、$\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ は $\lambda = 2$ に属する固有ベクトルであることを得る。特に、$\mathbb{R}^3$ が F_1 の固有ベクトルからなる基底を持つ。

$a = 2$ のとき、$\lambda = 1$ と $\lambda = 2$ が全ての固有値である。計算すると、$\mathbf{e}_1$ は $\lambda = 1$ に属する固有ベクトル、$\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ は $\lambda = 2$ に属する固有ベクトルである。さらに、F_2 の $\lambda = 2$ に属するの固有空間は 1 次元である。よって、$\mathbb{R}^3$ が F_2 の固有ベクトルからなる基底を持たない。