1　序文

開集合 $U \subset \mathbb{R}^2$ において、滑らかな写像 $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ もベクトル場とも呼ばれる。

質問 1.1. ベクトル場 $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ に対して、ポテンシャル $F\colon U \to \mathbb{R}$ が存在するか？

ここで、滑らかな関数 $F\colon U \to \mathbb{R}$ が $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ のポテンシャルであることは、F は次の微分方程式を満たすことである。

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = f_1, \qquad \frac{\partial F}{\partial x_2} = f_2.$$

ベクトル場 $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ のポテンシャル $F\colon U \to \mathbb{R}$ が存在するとき、

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1}$$

であるため、必ず $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ が次の等式を満たすことが成り立つ。

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}.$$

この等式を満たすベクトル場 $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ は、保存ベクトル場と呼ばれる。よって、質問 1.1 の代わりに、次の質問を答えればよい。

質問 1.2. 保存ベクトル場 $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ に対して、ポテンシャル $F\colon U \to \mathbb{R}$ が存在するか？

例 1.3. 次のように定めるベクトル場 $f\colon U = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ を考えて見る。

$$f(x_1, x_2) = \left(\frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right).$$

次の計算より、$f\colon U \to \mathbb{R}^2$ が保存ベクトル場であることを得る。

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{1 \cdot (x_1^2 + x_2^2) - x_1 \cdot 2x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{-1 \cdot (x_1^2 + x_2^2) - (-x_2 \cdot 2x_2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

今、ポテンシャル $F\colon U \to \mathbb{R}^2$ が存在することを仮定し、次の線積分を計算する。

$$\int_0^{2\pi} \frac{d}{d\theta} F(\cos\theta, \sin\theta) d\theta = F(1,0) - F(1,0) = 0.$$

授業ノートとレポート問題書：www.math.nagoya-u.ac.jp/~larsh/teaching/F2012_G

一方、連鎖律の公式により、

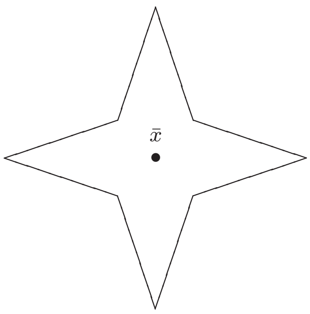
$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta}F(\cos\theta,\sin\theta) &= \frac{\partial F}{\partial x_1}(\cos\theta,\sin\theta)\cdot(-\sin\theta) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(\cos\theta,\sin\theta)\cdot\cos\theta \\
&= f_1(\cos\theta,\sin\theta)\cdot(-\sin\theta) + f_2(\cos\theta,\sin\theta)\cdot\cos\theta \\
&= 1
\end{aligned}
$$

であるため、直接に線積分を計算すると、

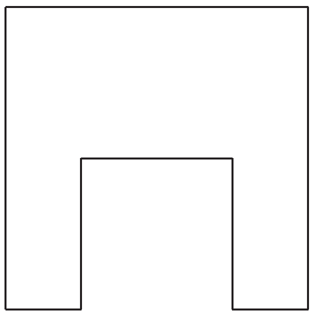
$$
\int_0^{2\pi}\frac{d}{d\theta}F(\cos\theta,\sin\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} 1\cdot d\theta = 2\pi
$$

を得る。よって、$f\colon U\to\mathbb{R}$ のポテンシャル $F\colon U\to\mathbb{R}$ が存在しないことが分かる。

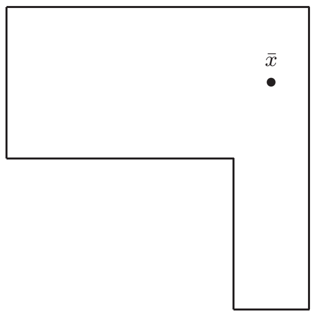
定義 **1.4.** 次の性質を満たす部分集合 $X\subset\mathbb{R}^n$ は星形集合と呼ばれる。「点 $\bar{x}\in X$ が存在し、任意の $x\in X$ と $t\in[0,1]$ に対して、$tx+(1-t)\bar{x}\in X$」



星形集合



星形でない集合



星形集合

部分集合 $X\subset\mathbb{R}^n$ が星形集合であることは、任意の点 $x\in X$ が一つの点 $\bar{x}\in X$ から見えることと同値である。次の定理を復習する。

定理 **1.5.** 星形開集合 $U\subset\mathbb{R}^2$ において、任意の保存ベクトル場 $f\colon U\to\mathbb{R}^2$ に対して、ポテンシャル $F\colon U\to\mathbb{R}$ が存在する。

証明. 開集合 U が点 $\bar{x}=(0,0)$ に関して星形集合であることを仮定すればよい。次のように定める関数 $F\colon U\to\mathbb{R}$ を考えてみる。

$$
F(x_1,x_2) = \int_0^1 \left(x_1f_1(tx_1,tx_2)+x_2f_2(tx_1,tx_2)\right)dt
$$

写像 $f\colon U\to\mathbb{R}^2$ とその偏導関数が連続であるため、

$$
\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1,x_2) = \int_0^1\left(f_1(tx_1,tx_2)+tx_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(tx_1,tx_2)+tx_2\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(tx_1,tx_2)\right)dt
$$

をえる。一方、$f\colon U \to \mathbb{R}^2$ が保存ベクトル場であるため、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(tf_1(tx_1,tx_2)\right) &= f_1(tx_1,tx_2) + tx_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(tx_1,tx_2) + tx_2\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(tx_1,tx_2)\\ &= f_1(tx_1,tx_2) + tx_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(tx_1,tx_2) + tx_2\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(tx_1,tx_2)\end{aligned}$$

が分かる。よって、

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = f_1$$

が成り立つ。同様に、

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = f_2$$

を得る。これで、$F\colon U \to \mathbb{R}$ は $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ のポテンシャルであることを示した。 $\square$

以上の例 1.3 と定理 1.5 を比べると、質問 1.2 の答えは、地域 U のトポロジーによることが分かる。以下、一般の場合に質問 1.2 を答えるために、地域 U の不変量 $H^1(U)$ を定義する。先ず、次のベクトル空間と線形写像を考えてみる。

$$C^\infty(U,\mathbb{R}) \xrightarrow{\text{grad}} C^\infty(U,\mathbb{R}^2) \xrightarrow{\text{rot}} C^\infty(U,\mathbb{R}) \tag{1.6}$$

ここで、$C^\infty(U,\mathbb{R}^k)$ は、各滑らかな写像 $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ からなるベクトル空間、勾配と呼ばれる線形写像 grad と回転と呼ばれる線形写像 rot は、次のように定義された線形写像である。

$$\text{grad}(F) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}\right), \qquad \text{rot}(f) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$$

これらを用いて、保存ベクトル場のなすベクトル空間とポテンシャルを持つベクトル場のなすベクトル空間が次のように表される。

$$\begin{aligned}\ker(\text{rot}) &= \{\,\text{保存ベクトル場 } f\colon U \to \mathbb{R}^2\} && (\ker = \text{核})\\ \text{im}(\text{grad}) &= \{\,\text{ポテンシャルを持つベクトル場 } f\colon U \to \mathbb{R}^2\} && (\text{im} = \text{像})\end{aligned}$$

さらに、

$$(\text{rot}\circ\text{grad})(F) = \text{rot}(\text{grad}(F)) = \text{rot}\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} = 0$$

であるため、

$$\text{im}(\text{grad}) \subset \ker(\text{rot})$$

が分かる。今、不変量 $H^1(U)$ は、次の商ベクトル空間と定義される。

定義 1.7. 開集合 $U \subset \mathbb{R}^2$ において、$H^1(U) = \ker(\mathrm{rot}) / \operatorname{im}(\mathrm{grad})$ と定義される。

ここで、ベクトル空間 W とその部分空間 $V \subset W$ において、商空間 W/V は次の剰余類からなるベクトル空間と定義される。

$$
\begin{aligned}
&W/V = \{w + V \mid w \in W\} \\
&(w + V) + (w' + V) = (w + w') + V \qquad && (w, w' \in W) \\
&a(w + V) = (aw) + V && (a \in \mathbb{R}, w \in W)
\end{aligned}
$$

任意の空集合でない開集合 $U \subset \mathbb{R}^2$ に関して、ベクトル空間 $\ker(\mathrm{rot})$ と部分空間 $\operatorname{im}(\mathrm{grad})$ は、無限次元ベクトル空間である。しかし、商空間 $H^1(U)$ が有限次元ベクトル空間となることはよくある。不変量 $H^1(U)$ を用いて、質問 1.2 が次のように表される。

質問 1.8. ベクトル空間 $H^1(U)$ はゼロで空間あるか？

同様に定理 1.5 と例 1.3 が、それぞれ「星形開集合 $U \subset \mathbb{R}^2$ に対して、$H^1(U)$ はゼロ空間である」と「開集合 $U = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$ の場合には、$H^1(U)$ はゼロ空間ではい」と表される。以下の授業 9 では、後者のベクトル空間は 1 次元であることを示す。

開集合 $U \subset \mathbb{R}^2$ において、次の三つのベクトル空間は定義される。

$$
\begin{aligned}
H^0(U) &= \ker(\mathrm{grad}) \\
H^1(U) &= \ker(\mathrm{rot}) / \operatorname{im}(\mathrm{grad}) \\
H^2(U) &= C^\infty(U, \mathbb{R}) / \operatorname{im}(\mathrm{rot})
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

定理 1.10. 開集合 $U \subset \mathbb{R}^2$ に対して、次の性質 (1)–(2) は同値である。

(1) ベクトル空間 $H^0(U)$ は 1 次元である。

(2) 地域 U は連結である。

証明. 滑らかな関数 $F\colon U \to \mathbb{R}$ に関して、$\mathrm{grad}(F) = 0$ であることと F が局所定関数であることは同値である。すなわち、$H^0(U)$ は局所定関数 $F\colon U \to \mathbb{R}$ のなすベクトル空間である。ある点 $\bar{x} \in U$ を固定すると、$H^0(U)$ は 1 次元ベクトル空間であることと次のように定める線形写像が同型であることは同値である。

$$\epsilon\colon H^0(U) \to \mathbb{R}, \qquad \epsilon(F) = F(\bar{x})$$

(2) $\Rightarrow$ (1)：任意の局所定関数 $F\colon U \to \mathbb{R}$ は定関数であることを示せばよい。部分集合

$$A = \{x \in U \mid F(x) = F(\bar{x})\} = F^{-1}(F(\bar{x})) \subset U$$

を考えてみる。F は連続なので、A は閉集合であることが分かる。さらに、F は局所定関数であるため、A も開集合であることを得る。仮定より、U は連結であるため、閉集合であるかつ開集合である部分集合 $A \subset U$ は、$A = \varnothing$ と $A = U$ しかない。しかし、$\bar{x} \in A$ ため、$A = U$ が成り立つ。すなわち、F は定関数であることを示した。

(1) $\Rightarrow$ (2)：U は連結でない場合には、滑らかな全射 $F\colon U \to \{0, 1\}$ が存在する。この関数 F は、必ず定関数でない局所定関数である。よって、$\dim H^0(U) > 1$ を得る。 □

最後に、3次元ベクトル解析の場合には、開集合 $U \subset \mathbb{R}^3$ において、次のベクトル空間と線形写像を考えてみる。

$$C^\infty(U, \mathbb{R}) \xrightarrow{\text{grad}} C^\infty(U, \mathbb{R}^3) \xrightarrow{\text{rot}} C^\infty(U, \mathbb{R}^3) \xrightarrow{\text{div}} C^\infty(U, \mathbb{R}) \tag{1.11}$$

ここで、勾配 grad 及び回転 rot、発散 div は次のように定める線形写像である。

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}(F) &= \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \frac{\partial F}{\partial x_3}\right) \\
\operatorname{rot}(f) &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) \\
\operatorname{div}(f) &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}
\end{aligned}$$

計算をすると、

$$\operatorname{rot} \circ \operatorname{grad} = \operatorname{div} \circ \operatorname{rot} = 0$$

を得るので、開集合 $U \subset \mathbb{R}^3$ に対する不変量が、次のように定義される。

$$\begin{aligned}
H^0(U) &= \ker(\operatorname{grad}) \\
H^1(U) &= \ker(\operatorname{rot}) / \operatorname{im}(\operatorname{grad}) \\
H^2(U) &= \ker(\operatorname{div}) / \operatorname{im}(\operatorname{rot}) \\
H^3(U) &= C^\infty(U, \mathbb{R}) / \operatorname{im}(\operatorname{div})
\end{aligned} \tag{1.12}$$

これらの不変量に対して、「$H^0(U)$ はゼロである」と「U は連結である」は同値、「$H^1(U)$ はゼロである」と「任意の保存ベクトル場に対して、ポテンシャルが存在する」は同値、「$H^2(U)$ はゼロである」と「任意の発散はゼロであるベクトル場に対して、ベクトルポテンシャルが存在する」は同値である。

2 交代代数

定義 **2.1.** 実ベクトル空間 V と正の整数 k において、次の性質 (1)–(3) を満たす写像

$$\omega\colon \underbrace{V\times\cdots\times V}_{k}\to\mathbb{R}$$

は、k 重交代式と呼ばれる。

(1) 任意の $1\leqslant i\leqslant k$ と $v_1,\dots,v_i,v_i',\dots,v_k\in V$ に対して、

$$\omega(v_1,\dots,v_i+v_i',\dots,v_k)=\omega(v_1,\dots,v_i,\dots,v_k)+\omega(v_1,\dots,v_i',\dots,v_k)$$

(2) 任意の $1\leqslant i\leqslant k$ と $v_1,\dots,v_k\in V$, $\lambda\in\mathbb{R}$ に対して、

$$\omega(v_1,\dots,\lambda v_i,\dots,v_k)=\lambda\omega(v_1,\dots,v_i,\dots,v_k)$$

(3) 任意の $1\leqslant i<j\leqslant k$ と $v_1,\dots,v_k\in V$ に対して、

$$v_i=v_j\ \Rightarrow\ \omega(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_k)=0$$

ベクトル空間 V 上の k 重交代式のなすベクトル空間は、$\mathrm{Alt}^k(V)$ と書かれる。このベクトル空間では、ベクトル和とスカラー積は次のように定義される。

$$\begin{aligned}(\omega+\omega')(v_1,\dots,v_k)&=\omega(v_1,\dots,v_k)+\omega'(v_1,\dots,v_k) &\qquad (\omega,\omega'\in\mathrm{Alt}^k(V))\\ (\lambda\omega)(v_1,\dots,v_k)&=\lambda\omega(v_1,\dots,v_k) &\qquad (\omega\in\mathrm{Alt}^k(V),\lambda\in\mathbb{R})\end{aligned}$$

さらに、$\mathrm{Alt}^0(V)=\mathbb{R}$ と定義する。

注 2.2. 定義 2.1 の性質 (1) と (2) を満たす写像

$$\omega\colon \underbrace{V\times\cdots\times V}_{k}\to\mathbb{R}$$

は、V 上の k 重線形形式と呼ばれる。

補題 **2.3.** 任意の $k>\dim(V)$ に対して、$\mathrm{Alt}^k(V)=0$ である。

証明. V は無限次元の場合には、補題は自明なので、V は有限次元 n であることを仮定すればよい。$S = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset V$ を基底とする。これに対して、任意のベクトル $v_1, \ldots, v_k \in V$ は、一意的に次のような線形結合と書くことができる。

$$v_1 = a_{1,1}e_1 + \cdots + a_{1,n}e_n$$
$$\vdots$$
$$v_k = a_{k,1}e_1 + \cdots + a_{k,n}e_n$$

よって、k 重交代式 ω に関して、定義 2.1 の性質 (1) と (2) より、

$$\begin{aligned}\omega(v_1, \ldots, v_k) &= \omega(a_{1,1}e_1 + \cdots + a_{1,n}e_n, \ldots, a_{k,1}e_1 + \cdots + a_{k,n}e_n) \\ &= \sum_{1 \leqslant h_1, \ldots, h_k \leqslant n} a_{1,h_1} \ldots a_{k,h_k} \omega(e_{h_1}, \ldots, e_{h_k})\end{aligned}$$

を得る。しかし、$k > n$ のとき、任意の $1 \leqslant h_1, \ldots, h_k \leqslant n$ に対して、必ず $h_i = h_j$ を満たす $1 \leqslant i < j \leqslant n$ が存在するため、$\omega(e_{h_1}, \ldots, e_{h_k}) = 0$ が分かる。よって、$k > n$ のとき、

$$\omega(v_1, \ldots, v_k) = 0$$

が成り立つ。これで、補題を示した。 □

次に、対称群 S_k と符号と呼ばれる準同型 $\mathrm{sgn}\colon S_k \to \{\pm 1\}$ を復習する。集合 $\{1, 2, \ldots, k\}$ の置換からなる群は、対称群と呼ばれ、S_k と書かれる。2 つの元 $1 \leqslant i < j \leqslant k$ を入れ替える特別な置換は、互換と呼ばれ、(i, j) と書かれる。任意の置換は、互換の積として表されるため、対称群は互換で生成されている。任意の互換を -1 に移す準同型

$$\mathrm{sgn}\colon S_k \to \{\pm 1\}$$

は、ただ一つ存在する。この準同型は符号と呼ばれる。

補題 **2.4.** 任意の交代式 $\omega \in \mathrm{Alt}^k(V)$ と置換 $\sigma \in S_k$ に対して、

$$\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\omega(v_1, \ldots, v_k)$$

である。

証明. 帰納法を用い、次の命題を示す。「n 個の互換の積として表せる置換 $\sigma \in S_k$ と任意の交代式 $\omega \in \mathrm{Alt}^k(V)$、ベクトル $v_1, \ldots, v_k \in V$ に対して、

$$\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\omega(v_1, \ldots, v_k)$$

である」

まず、$n=0$ のとき、$\sigma=1$ ため命題は自明なので、$n-1$ のときを正しいと仮定し、n のときを示せばよい。置換 σ を互換 (i,j) と $n-1$ の互換の積として表せる置換 τ の積

$$\sigma=(i,j)\tau$$

と表しておく。帰納法の仮定より、任意の $\omega\in\mathrm{Alt}^k(V)$ と $v_1,\ldots,v_k\in V$ に対して、

$$\omega(v_{\tau(1)},\ldots,v_{\tau(k)})=\mathrm{sgn}(\tau)\omega(v_1,\ldots,v_k)$$

である。特に、左辺で定義された多重線形形式

$$\omega^\tau(v_1,\ldots,v_k)=\omega(v_{\tau(1)},\ldots,v_{\tau(k)})$$

も交代式であることが分かる。それに、

$$\omega(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(k)})=\omega^\tau(v_1,\ldots,v_{i-1},v_j,v_{i+1},\ldots,v_{j-1},v_i,v_{j+1},\ldots,v_k)$$

と表される。しかし、

$$\begin{aligned}&\omega^\tau(v_1,\ldots,v_{i-1},v_j,v_{i+1},\ldots,v_{j-1},v_i,v_{j+1},\ldots,v_k)\\&=-\omega^\tau(v_1,\ldots,v_{i-1},v_i,v_{i+1},\ldots,v_{j-1},v_j,v_{j+1},v_k)\end{aligned}\tag{2.5}$$

であるため、

$$\begin{aligned}\omega(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(k)})&=\omega^\tau(v_1,\ldots,v_{i-1},v_j,v_{i+1},\ldots,v_{j-1},v_i,v_{j+1},\ldots,v_k)\\&=-\omega^\tau(v_1,\ldots,v_{i-1},v_i,v_{i+1},\ldots,v_{j-1},v_j,v_{j+1},\ldots,v_k)\\&=-\mathrm{sgn}(\tau)\omega(v_1,\ldots,v_k)\\&=\mathrm{sgn}(\sigma)\omega(v_1,\ldots,v_k)\end{aligned}$$

であることが分かる。帰納法より、任意の非負整数 n に対して、命題は正しい。

最後に、(2.5) を示す。定義 2.1 の性質 (3) より、

$$\omega^\tau(v_1,\ldots,v_{i-1},v_i+v_j,v_{i+1},\ldots,v_{j-1},v_i+v_j,v_{j+1},\ldots,v_k)=0$$

ことが分かる。さらに、定義 2.1 の性質 (2) より、左辺は次のように表される。

$$\begin{aligned}&\omega^\tau(v_1,\ldots,v_{i-1},v_i,v_{i+1},\ldots,v_{j-1},v_i,v_{j+1},\ldots,v_k)\\&+\omega^\tau(v_1,\ldots,v_{i-1},v_i,v_{i+1},\ldots,v_{j-1},v_j,v_{j+1},\ldots,v_k)\\&+\omega^\tau(v_1,\ldots,v_{i-1},v_j,v_{i+1},\ldots,v_{j-1},v_i,v_{j+1},\ldots,v_k)\\&+\omega^\tau(v_1,\ldots,v_{i-1},v_j,v_{i+1},\ldots,v_{j-1},v_j,v_{j+1},\ldots,v_k)\end{aligned}$$

ここで、定義 2.1 の性質 (3) より、第 1 項と第 4 項はゼロであるため、(2.5) が成り立つ。 □

例 2.6. 有限次元のベクトル空間 V とその基底 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ に関して、次のように n 重交代式 $\omega \in \mathrm{Alt}^n(V)$ が定義される。n 個のベクトル

$$\begin{gathered} v_1 = a_{1,1}e_1 + \cdots + a_{1,n}e_n \\ \vdots \\ v_n = a_{n,1}e_1 + \cdots + a_{n,n}e_n \end{gathered}$$

に対して、

$$\omega(v_1, \ldots, v_n) = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

である。行列式の性質より、ω は定義 2.1 の性質 (1)–(3) を満たすことになる。

定義 2.7. 非負整数 n と $p + q = n$ を満たす非負整数 p と q において、

$$「\sigma(1) < \cdots < \sigma(p) \quad \text{かつ} \quad \sigma(p+1) < \cdots < \sigma(p+q)」$$

を満たす置換 $\sigma \in S_n$ は、(p, q) シャッフルと呼ばれる。対称群 S_n の (p, q) シャッフルからなる部分集合は、$S_{p,q}$ と書かれる。

補題 2.8. V を実ベクトル空間、k を非負整数とする。任意の $v_1, \ldots, v_k \in V$ と $1 \leq i < k$ に対して、「$v_i = v_{i+1}$ ならば $\omega(v_1, \ldots, v_k) = 0$」を満たす k 重線形形式 ω は、交代式である。

証明. ω は線形形式であるため、仮定

$$\omega(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i + v_{i+1}, v_i + v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_k) = 0$$

を用い、

$$\omega(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, v_i, v_{i+2}, \ldots, v_k) = -\omega(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_k)$$

を得る。対称群 S_k は、互換 $(i, i+1)$（$1 \leqslant i < k$）で生成されるので、任意の置換 $\sigma \in S_k$ に対して、$\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\omega(v_1, \ldots, v_k)$ であることが分かる。よって、ω は交代式であることが成り立つ。 □

定義 2.9. 交代式 $\omega_1 \in \mathrm{Alt}^p(V)$ と $\omega_2 \in \mathrm{Alt}^q(V)$ に対して、次のように定義される $(p+q)$ 重線形形式は、ω_1 と ω_2 の外積と呼ばれ、$\omega_1 \wedge \omega_2$ と書かれる。

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1, \ldots, v_{p+q}) = \sum_{\sigma \in S_{p,q}} \mathrm{sgn}(\sigma)\omega_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) \cdot \omega_2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)})$$

注 2.10. $p = 0$ のとき、$\omega_1 \in \mathrm{Alt}^0(V) = \mathbb{R}$ が実数、外積 $\omega_1 \wedge \omega_2$ とスカラー積 $\omega_1\omega_2$ が等しい。同様に、$q = 0$ のとき、ω_2 が実数、外積 $\omega_1 \wedge \omega_2$ とスカラー積 $\omega_2\omega_1$ が等しい。

補題 2.11. 任意の交代式 $\omega_1 \in \mathrm{Alt}^p(V)$ と $\omega_2 \in \mathrm{Alt}^q(V)$ に対して、多重線形形式 $\omega_1 \wedge \omega_2$ も交代式である。すなわち、$\omega_1 \wedge \omega_2 \in \mathrm{Alt}^{p+q}(V)$。

証明. 補題 2.8 より、任意の $v_1, \ldots, v_{p+q} \in V$ に対して、

$$「v_i = v_{i+1} \quad ならば \quad (\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1, \ldots, v_{p+q}) = 0」$$

を示せばよい。そのために、$S_{p,q}$ を、次の部分集合 $S_{p,q}^{(0)}$ と $S_{p,q}^{(1)}$、$S_{p,q}^{(2)}$ に分解する。

$$\begin{aligned} S_{p,q}^{(1)} &= \{\sigma \in S_{p,q} \mid \sigma^{-1}(i) \leqslant p \ \ かつ \ \ \sigma^{-1}(i+1) \geqslant p+1\} \\ S_{p,q}^{(2)} &= \{\sigma \in S_{p,q} \mid \sigma^{-1}(i) \geqslant p+1 \ \ かつ \ \ \sigma^{-1}(i+1) \leqslant p\} \\ S_{p,q}^{(0)} &= S_{p,q} \smallsetminus (S_{p,q}^{(1)} \cup S_{p,q}^{(2)}) \end{aligned}$$

$\sigma \in S_{p,q}^{(0)}$ のときには、$\omega_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) = 0$ か $\omega_2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) = 0$ ため、

$$\begin{aligned} (\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1, \ldots, v_{p+q}) = &\sum_{\sigma \in S_{p,q}^{(1)}} \mathrm{sgn}(\sigma)\omega_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) \cdot \omega_2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) \\ &+ \sum_{\sigma \in S_{p,q}^{(2)}} \mathrm{sgn}(\sigma)\omega_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) \cdot \omega_2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) \end{aligned}$$

を得る。さらに、互換 $\tau = (i, i+1)$ において、写像 $\sigma \mapsto \tau\sigma$ は、$S_{p,q}^{(1)}$ から $S_{p,q}^{(2)}$ への全単射を誘導し、$\mathrm{sgn}(\tau\sigma) = -\mathrm{sgn}(\sigma)$ であるため、

$$\begin{aligned} (\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1, \ldots, v_{p+q}) = &\sum_{\sigma \in S_{p,q}^{(1)}} \mathrm{sgn}(\sigma)\omega_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) \cdot \omega_2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) \\ &- \sum_{\sigma \in S_{p,q}^{(1)}} \mathrm{sgn}(\sigma)\omega_1(v_{\tau\sigma(1)}, \ldots, v_{\tau\sigma(p)}) \cdot \omega_2(v_{\tau\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\tau\sigma(p+q)}) \end{aligned}$$

が成り立つ。しかし、$v_i = v_{i+1}$ より、任意の $\sigma \in S_{p,q}^{(1)}$ に対して、

$$(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}, v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) = (v_{\tau\sigma(1)}, \ldots, v_{\tau\sigma(p)}, v_{\tau\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\tau\sigma(p+q)})$$

が分かるので、$(\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1, \ldots, v_{p+q}) = 0$ が成り立つ。これで、補題を示した。 $\square$

3　交代代数（続き）

交代式の構想を説明するために、次の定義を紹介する。

定義 **3.1.** $\mathbb{R}$ 上次数つき反可換代数A^* とは、実ベクトル空間 A^p（$p \geqslant 0$）と次の性質 (i)–(iii) を満たす線形写像 $\eta\colon \mathbb{R} \to A^0$ と双線形写像 $\mu_{p,q}\colon A^p \times A^q \to A^{p+q}$（$p, q \geqslant 0$）を合わせてのものである。

(i) 「単位」任意の $p \geqslant 0$ と $a \in A^p$、$\lambda \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\mu_{0,p}(\eta(\lambda), a) = \lambda a = \mu_{p,0}(a, \eta(\lambda))$$

である。

(ii) 「結合律」任意の $p, q, r \geqslant 0$ と $a_1 \in A^p$、 $a_2 \in A^q$、 $a_3 \in A^r$ に対して、

$$\mu_{p,q+r}(a_1, \mu_{q,r}(a_2, a_3)) = \mu_{p+q,r}(\mu_{p,q}(a_1, a_2), a_3)$$

である。

(iii) 「反可換律」任意の $p, q \geqslant 0$ と $a_1 \in A^p$、$a_2 \in A^q$ に対して、

$$\mu_{q,p}(a_2, a_1) = (-1)^{pq}\mu_{p,q}(a_1 a_2)$$

である。

定義 **3.2.** 実ベクトル空間 V において、ベクトル空間 $\mathrm{Alt}^p(V)$（$p \geqslant 0$）と次のように定義された線形写像 $\eta\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Alt}^0(V)$ と双線形写像 $\mu_{p,q}\colon \mathrm{Alt}^p(V) \times \mathrm{Alt}^q(V) \to \mathrm{Alt}^{p+q}(V)$（$p, q \geqslant 0$）を合わせてものは、$V$ で生成された交代代数と呼ばれ、$\mathrm{Alt}^*(V)$ と書かれる。

$$\eta(\lambda) = \lambda, \qquad \mu_{p,q}(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 \wedge \omega_2$$

定理 **3.3.** 実ベクトル空間V に対して、交代代数 $\mathrm{Alt}^*(V)$ は $\mathbb{R}$ 上次数つき反可換代数である。

証明. 外積は結合律を満たすことを示すために、次の性質を満たす置換 $\sigma \in S_{p+q+r}$ のなす部分集合 $S_{p,q,r} \subset S_{p+q+r}$ を考えてみる。

「$\sigma(1) < \cdots < \sigma(p)$　かつ　$\sigma(p+1) < \cdots < \sigma(p+q)$　かつ　$\sigma(p+q+1) < \cdots < \sigma(p+q+r)$」

さらに、$S'_{p,q,r}, S''_{p,q,r} \subset S_{p,q,r}$ を次の部分集合とする。

$$S'_{p,q,r} = \{\sigma \in S_{p,q,r} \mid \text{任意の}\, i \leqslant p\, \text{に対して、}\sigma(i) = i\, \text{である}\,\}$$
$$S''_{p,q,r} = \{\sigma \in S_{p,q,r} \mid \text{任意の}\, p+q+1 \leqslant i\, \text{に対して、}\sigma(i) = i\, \text{である}\,\}$$

これらの部分集合について、次の全単射が成り立つ。

$$f\colon S_{p,q+r} \times S'_{p,q,r} \xrightarrow{\sim} S_{p,q,r}, \qquad f(\sigma,\tau) = \sigma \circ \tau$$
$$g\colon S_{p+q,r} \times S''_{p,q,r} \xrightarrow{\sim} S_{p,q,r}, \qquad g(\sigma,\tau) = \sigma \circ \tau$$

全単射 f を使い、

$$\begin{aligned}
&(\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3))\,(v_1,\ldots,v_{p+q+r}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_{p,q+r}} \operatorname{sgn}(\sigma)\omega_1\bigl(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(p)}\bigr) \cdot (\omega_2 \wedge \omega_3)\bigl(v_{\sigma(p+1)},\ldots,v_{\sigma(p+q+r)}\bigr) \\
&= \sum_{\sigma \in S_{p,q+r}} \operatorname{sgn}(\sigma)\omega_1\bigl(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(p)}\bigr) \cdot \Biggl(\sum_{\tau \in S'_{p,q,r}} \operatorname{sgn}(\tau) \\
&\qquad \omega_2\bigl(v_{\sigma\tau(p+1)},\ldots,v_{\sigma\tau(p+q)}\bigr) \cdot \omega_3\bigl(v_{\sigma\tau(p+q+1)},\ldots,v_{\sigma\tau(p+q+r)}\bigr)\Biggr) \\
&= \sum_{\mu \in S_{p,q,r}} \operatorname{sgn}(\mu)\omega_1\bigl(v_{\mu(1)},\ldots,v_{\mu(p)}\bigr)\omega_2\bigl(v_{\mu(p+1)},\ldots,v_{\mu(p+q)}\bigr)\omega_3\bigl(v_{\mu(p+q+1)},\ldots,v_{\mu(p+q+r)}\bigr)
\end{aligned}$$

を得る。同様に、全単射 g を使い、

$$\begin{aligned}
&((\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3))\,(v_1,\ldots,v_{p+q+r}) \\
&= \sum_{\mu \in S_{p,q,r}} \operatorname{sgn}(\mu)\omega_1\bigl(v_{\mu(1)},\ldots,v_{\mu(p)}\bigr)\omega_2\bigl(v_{\mu(p+1)},\ldots,v_{\mu(p+q)}\bigr)\omega_3\bigl(v_{\mu(p+q+1)},\ldots,v_{\mu(p+q+r)}\bigr)
\end{aligned}$$

が分かる。これで、外積は結合律を満たすことを示した。

以下、外積が反可換律を満たすことを示す。まず、$\tau \in S_{p+q}$ を次の置換とする。

$$\tau(i) = \begin{cases} p+i & (1 \leqslant i \leqslant q) \\ i-q & (q+1 \leqslant i \leqslant p+q) \end{cases}$$

この置換が次の性質 (i)–(iii) を満たす。

(i) $\operatorname{sgn}(\tau) = (-1)^{pq}$ である。

(ii) 次のように定める写像は全単射である。

$$f\colon S_{p,q} \to S_{q,p}, \qquad f(\sigma) = \sigma \circ \tau$$

(iii) 任意の $v_1, \ldots, v_{p+q} \in V$ に対して、

$$\omega_2(v_{\sigma\tau(1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(q)}) = \omega_2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)})$$
$$\omega_1(v_{\sigma\tau(q+1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(p+q)}) = \omega_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)})$$

である。

よって、

$$\begin{aligned}
(\omega_2 \wedge \omega_1)(v_1, \ldots, v_{p+q}) &= \sum_{\sigma \in S_{q,p}} \operatorname{sgn}(\sigma)\omega_2(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(q)}) \cdot \omega_1(v_{\sigma(q+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_{p,q}} \operatorname{sgn}(\sigma\tau)\omega_2(v_{\sigma\tau(1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(q)}) \cdot \omega_1(v_{\sigma\tau(q+1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(p+q)}) \\
&= (-1)^{pq} \sum_{\sigma \in S_{p,q}} \operatorname{sgn}(\sigma)\omega_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) \cdot \omega_2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) \\
&= (-1)^{pq}(\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1, \ldots, v_{p+q})
\end{aligned}$$

が分かる。すなわち、外積は反可換律であることを示した。 □

交代代数 $\mathrm{Alt}^*(V)$ の構想を理解するために、次の補題を証明する。

補題 **3.4.** 任意の実ベクトル空間 V と自然数 p、交代式 $\omega_1, \ldots, \omega_p \in \mathrm{Alt}^1(V)$、ベクトル $v_1, \ldots, v_p \in V$ に対して、

$$(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p)(v_1, \ldots, v_p) = \det \begin{pmatrix} \omega_1(v_1) & \ldots & \omega_1(v_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_p(v_1) & \ldots & \omega_p(v_p) \end{pmatrix}$$

である。

証明. 帰納法を用いて示す。$p = 1$ のとき、$\omega_1(v_1) = \det(\omega_1(v_1))$ は正しいので、$p = r - 1$ の

ときを正しいと仮定し、$p=r$ のときを示せばよい。

$$
\begin{aligned}
&(\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_r))(v_1, \ldots, v_r) \\
&= \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j+1} \omega_1(v_j)(\omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_r)(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_r) \\
&= \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j+1} \omega_1(v_j) \det \begin{pmatrix} \omega_2(v_1) & \ldots & \omega_2(v_{j-1}) & \omega_2(v_{j+1}) & \ldots & \omega_2(v_r) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_r(v_1) & \ldots & \omega_r(v_{j-1}) & \omega_r(v_{j+1}) & \ldots & \omega_r(v_r) \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \omega_1(v_1) & \ldots & \omega_1(v_r) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_r(v_1) & \ldots & \omega_r(v_r) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる。ここで、最初の方程式は外積の定義、次の方程式は帰納法の仮定、最後の方程式は行列式の性質から成り立つ。$p=r$ のときは正しいことを示したため、帰納法より、補題が成り立つ。 □

有限次元実ベクトル空間 V とその基底 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ において、次のように定める $\mathrm{Alt}^1(V)$ の基底 $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ は、反対基底と呼ばれる。

$$
e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}
$$

定理 3.5. 有限次元実ベクトル空間 V とその基底 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ について、任意の $1 \leqslant p \leqslant n$ に対して、次の部分集合は、実ベクトル空間 $\mathrm{Alt}^p(V)$ の基底となることである。

$$
B_p = \{e_{\sigma(1)}^* \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(p)}^* \mid \sigma \in S_{p,n-p}\}
$$

特に、$\dim \mathrm{Alt}^p(V) = \binom{n}{p}$ である。

証明. まず、補題 3.4 より、

$$
(e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_p}^*)(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p}) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(\sigma) & (\{i_1, \ldots, i_p\} = \{j_1, \ldots, j_p\}) \\ 0 & (\{i_1, \ldots, i_p\} \neq \{j_1, \ldots, j_p\}) \end{cases}
$$

を得る。ここで、$\sigma \in S_p$ は「$\sigma(i_k) = j_k$ （$1 \leqslant k \leqslant p$）」で定める置換である。よって、補題 2.4 より、任意の交代式 $\omega \in \mathrm{Alt}^p(V)$ にたいして、

$$\omega = \sum_{\sigma \in S_{p,n-p}} \omega(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(p)}) e^*_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\sigma(p)}$$

が分かれる。すなわち、任意の $\omega \in \mathrm{Alt}^p(V)$ が B_p の線形結合で表される。それで、線形関係

$$\sum_{\sigma \in S_{p,n-p}} \lambda_\sigma e^*_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\sigma(p)} = 0 \qquad (\lambda_\sigma \in \mathbb{R})$$

において、任意の $\tau \in S_{p,n-p}$ に対して、

$$\lambda_\tau = \Big(\sum_{\sigma \in S_{p,n-p}} \lambda_\sigma e^*_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\sigma(p)} \Big)(e_{\tau(1)}, \dots, e_{\tau(p)}) = 0(e_{\tau(1)}, \dots, e_{\tau(p)}) = 0$$

を得るため、B_p は線形独立であることも示した。 □

定義 **3.6.** 線形写像 $f\colon V \to W$ において、線形写像

$$\mathrm{Alt}^p(f)\colon\ \mathrm{Alt}^p(W) \to \mathrm{Alt}^p(V), \qquad \mathrm{Alt}^p(f)(\omega)(v_1, \dots, v_p) = \omega(f(v_1), \dots, f(v_p))$$

は、f で誘導された写像と呼ばれ、$\mathrm{Alt}^p(f)$ または f^* と書かれる。

誘導された写像に対して、次の性質 (i)–(ii) は示しやすいである。

(i) $\mathrm{Alt}^p(g \circ f) = \mathrm{Alt}^p(f) \circ \mathrm{Alt}^p(g)$

(ii) $\mathrm{Alt}^p(\mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_{\mathrm{Alt}^p(V)}$

すなわち、$\mathrm{Alt}^p(-)$ は反変関手である。性質 (i)–(ii) を使うことがよくある。例として、次の補題を示す。

補題 **3.7.** 任意の同型 $f\colon V \to W$ に対して、誘導写像 $f^*\colon\ \mathrm{Alt}^p(W) \to \mathrm{Alt}^p(V)$ も同型である。

証明*.* 線形写像 $f\colon V \to W$ は同型であるとは、次の性質を満たす線形写像 $g\colon W \to V$ が存在することである。

$$f \circ g = \mathrm{id}_W$$

$$g \circ f = \mathrm{id}_V$$

よって、

$$\mathrm{Alt}^p(f\circ g)=\mathrm{Alt}^p(\mathrm{id}_W)$$
$$\mathrm{Alt}^p(g\circ f)=\mathrm{Alt}^p(\mathrm{id}_V)$$

である。今、性質 (i)–(ii) を用い、

$$\mathrm{Alt}^p(g)\circ\mathrm{Alt}^p(f)\overset{\text{(i)}}{=}\mathrm{Alt}^p(f\circ g)=\mathrm{Alt}^p(\mathrm{id}_W)\overset{\text{(ii)}}{=}\mathrm{id}_{\mathrm{Alt}^p(W)}$$
$$\mathrm{Alt}^p(f)\circ\mathrm{Alt}^p(g)\overset{\text{(i)}}{=}\mathrm{Alt}^p(g\circ f)=\mathrm{Alt}^p(\mathrm{id}_V)\overset{\text{(ii)}}{=}\mathrm{id}_{\mathrm{Alt}^p(V)}$$

を得るため、誘導写像 $\mathrm{Alt}^p(f)$ は同型であることが分かれる。 □

命題 3.8. 有限次元 n のベクトル空間 V と線形写像 $f\colon V\to V$ に対して、

$$\mathrm{Alt}^n(f)(\omega)=\det(f)\omega$$

である。

証明. V の基底 $\{e_1,\dots,e_n\}$ を選択する。定理 3.5 より、$B_n=\{e_1^*\wedge\cdots\wedge e_n^*\}\subset\mathrm{Alt}^n(V)$ は基底であることが分かる。よって、

$$\mathrm{Alt}^n(f)(e_1^*\wedge\cdots\wedge e_n^*)(e_1,\dots,e_n)=\det(f)$$

を示せばよい。ここで、誘導写像の定義より、

$$\mathrm{Alt}^n(f)(e_1^*\wedge\cdots\wedge e_n^*)(e_1,\dots,e_n)=(e_1^*\wedge\cdots\wedge e_n^*)(f(e_1),\dots,f(e_n))$$

である。さらに、補題 3.4 より、

$$(e_1^*\wedge\cdots\wedge e_n^*)(f(e_1),\dots,f(e_n))=\det\begin{pmatrix}e_1^*(f(e_1)) & \dots & e_1^*(f(e_n))\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ e_n^*(f(e_1)) & \dots & e_n^*(f(e_n))\end{pmatrix}$$

が分かる。しかし、右辺は $\det(f)$ である。なぜなら、

$$f(e_1)=e_1^*(f(e_1))e_1+\cdots+e_n^*(f(e_n))e_n$$
$$\vdots$$
$$f(e_n)=e_1^*(f(e_n))e_1+\cdots+e_n^*(f(e_n))e_n$$

である。これで、補題が成り立つ。 □

4　微分形式

以下、開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ を固定する。

定義 **4.1.** U 上 p 次微分形式とは、滑らかな写像

$$\omega\colon U \to \mathrm{Alt}^p(\mathbb{R}^n)$$

のものである。U 上 p 次微分形式のなすベクトル空間は $\Omega^p(U)$ と書かれる。

注 4.2. U 上 p 次微分形式のなすベクトル空間は、

$$\Omega^p(U) = C^\infty(U, \mathrm{Alt}^p(\mathbb{R}^n))$$

とも定義される。

定理 3.3 を想起し、次の補題が成り立つ。

補題 **4.3.** ベクトル空間 $\Omega^p(U)$（$p \geqslant 0$）と次のように定義された線形写像 $\eta\colon \mathbb{R} \to \Omega^0(U)$ と双線形写像 $\mu_{p,q}\colon \Omega^p(U) \times \Omega^q(U) \to \Omega^{p+q}(U)$（$p, q \geqslant 0$）を合わせてものは、$\mathbb{R}$ 上次数つき反可換代数である。

$$\eta(\lambda)(x) = \lambda, \qquad \mu_{p,q}(\omega_1, \omega_2)(x) = \omega_1(x) \wedge \omega_2(x)$$

ここで、「$\wedge$」は、交代代数 $\mathrm{Alt}^*(\mathbb{R}^n)$ の外積である。 □

注 4.4. (1) 次数つき反可換代数 $\Omega^*(U)$ の積も外積と呼ばれ、$\omega_1 \wedge \omega_2$ と書かれる。すなわち、

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(x) = \omega_1(x) \wedge \omega_2(x)$$

である。

(2) $\mu_{0,0}$ に関して、$\Omega^0(U)$ は可換環、$\mu_{0,p}$ に関して、$\Omega^p(U)$ は $\Omega^0(U)$ 上加群となる。

(3) 空集合でない開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ に対して、$\Omega^p(U)$（$0 \leqslant p \leqslant n$）は無限次元ベクトル空間、$\Omega^p(U)$（$p > n$）はゼロベクトル空間である。

ベクトル空間 V, W において、線形写像 $f\colon V \to W$ のなす集合

$$\mathrm{Hom}(V, W) = \{ f\colon V \to W \mid f \text{ は線形写像} \}$$

は、次のようにベクトル空間となる。

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v)$$
$$(\lambda f)(v) = \lambda f(v)$$

特に、ベクトル空間 $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$ は、ベクトル空間 V の反対空間である。V は n 次元、W は m 次元のとき、$\mathrm{Hom}(V, W)$ が mn 次元である。なぜなら、

$$S = \{e_j \mid 1 \leqslant j \leqslant n\} \subset V$$
$$T = \{d_i \mid 1 \leqslant i \leqslant m\} \subset W$$

は基底であるとき、

$$S^*T = \{e_j^* d_i \mid 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n\} \subset \mathrm{Hom}(V, W)$$

が基底となる。ここで、$(e_j^* d_i)(v) = e_j^*(v) d_i$ である。ただし、$f\colon V \to W$ の基底 S^*T に関する座標 f_{ij} は、$f\colon V \to W$ の基底 S と T に関する表現行列 (f_{ij}) の成分である。

定義 **4.5.** 滑らかな写像 $\omega\colon U \to \mathrm{Alt}^p(\mathbb{R}^n)$ において、導関数とは、

$$(D\omega)(x)(v) = D_x\omega(v) = \frac{d}{dt}\omega(x+tv)|_{t=0}$$

で定義された滑らかな写像

$$D\omega\colon U \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathrm{Alt}^p(\mathbb{R}^n))$$

である。

注 4.6. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の標準基底 $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$ と p 重交代式からなるベクトル空間 $\mathrm{Alt}^p(\mathbb{R}^n)$ の誘導された基底 $T = \{e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_p}^* \mid 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n\}$ を思い出す。任意の写像 $\omega\colon U \to \mathrm{Alt}^p(\mathbb{R}^n)$ が一意的に

$$\omega(x) \;=\; \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n} \omega_{i_1,\ldots,i_p}(x) e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_p}^*$$

で表されるため、定義 4.5 より、

$$(D\omega)(x)(e_j) = D_x\omega(e_j) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n} \frac{\partial \omega_{i_1,\ldots,i_p}}{\partial x_j}(x) e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_p}^*$$

であることが分かる。よって、線形写像 $(D\omega)(x) = D_x\omega\colon \mathbb{R}^n \to \mathrm{Alt}^p(\mathbb{R}^n)$ の基底 $S \subset \mathbb{R}^n$ と $T \subset \mathrm{Alt}^p(\mathbb{R}^n)$ に関する表現行列は、次の $\binom{n}{p} \times n$ 行列となることが分かる。

$$\left(\frac{\partial \omega_{i_1,\ldots,i_p}}{\partial x_j}(x)\right)$$

定義 4.7. 次のように定義された線形写像

$$d\colon \Omega^p(U) \to \Omega^{p+1}(U)$$

は、外微分とよばれる。

$$(d\omega)(x)(v_1, \dots, v_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} (D\omega)(x)(v_i)(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{p+1})$$

注 4.8. ω は p 重微分形式であるとき、$d\omega$ が $p+1$ 重微分形式となる。なぜなら、任意の $v \in \mathbb{R}^n$ に対して、$(D\omega)(x)(v)$ は p 重交代式であるため、$v_j = v_{j+1}$ のとき、

$$\begin{aligned}(d\omega)(x)(v_1, \dots, v_{p+1}) &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} D_x\omega(v_i)(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{p+1}) \\ &= (-1)^{j-1} D_x\omega(v_j)(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, v_{j+2}, \dots, v_{p+1}) \\ &\quad + (-1)^j D_x\omega(v_{j+1})(v_1, \dots, v_{j-1}, v_j, v_{j+2}, \dots, v_{p+1}) \\ &= 0\end{aligned}$$

が成り立つ。

射影写像 $x_i\colon U \to \mathbb{R}$ を $x_i(x) = \langle x, e_i \rangle$ で定める滑らかな写像とし、その外微分

$$dx_i\colon U \to \mathrm{Alt}^1(\mathbb{R}^n)$$

を考えてみる。ここで、$\langle -, - \rangle$ は、$\mathbb{R}^n$ の標準内積である。

補題 4.9. 任意の滑らかな写像 $f\colon U \to \mathbb{R}$ に対して、

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \wedge dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \wedge dx_n$$

である。

証明. 定義 4.7 と連鎖律の公式より、$f \in \Omega^0(U)$ と $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$(df)(x)(v) = \frac{d}{dt} f(x + tv)|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) v_n$$

が分かる。特に、$f = x_i$ のとき、$(dx_i)(x)(v) = v_i$ であるため、

$$df(x)(v) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) dx_1(x)(v) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) dx_n(x)(v)$$

を得る。外積の定義と比べると補題が成り立つ。 □

補題 4.10. 任意の滑らかな写像 $f\colon U \to \mathbb{R}$、$1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n$ に対して、

$$d(f \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}) = df \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

である。

証明. 連鎖律の公式と定義 4.7 より、任意の $x \in U$ と $v \in \mathbb{R}^n$ にたいして、

$$D(f \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p})(x)(v) = (df)(x)(v)(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p})(x)$$

が分かる。なぜなら、$dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}\colon U \to \mathrm{Alt}^p(\mathbb{R}^n)$ は、定関数である。よって、定義 4.7 と 2.9 より、

$$\begin{aligned}
&d(f \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p})(x)(v_1, \ldots, v_{p+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} (df)(x)(v_i)(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p})(x)(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_{p+1}) \\
&= \big(df \wedge (dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p})\big)(x)(v_1, \ldots, v_{p+1})
\end{aligned}$$

を得る。これで、補題を示した。 □

補題 4.11. 任意の $p \geqslant 0$ に対して、合成写像

$$d \circ d\colon \Omega^p(U) \to \Omega^{p+2}(U)$$

は、ゼロ写像である。

証明. 定理 3.5 より、任意の $f \in \Omega^0(U)$ と $1 \leqslant i_1 < \ldots i_p \leqslant n$ に対して、

$$d(d(f \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p})) = 0$$

であることを示せばよい。補体 4.10 と 4.9 より、

$$\begin{aligned}
d(f \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}) &= df \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \wedge dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}
\end{aligned}$$

が分かる。同様に、$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ であるため、

$$\begin{aligned}
d(d(f \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p})) &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \wedge dx_i \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \\
&= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) \wedge dx_i \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}
\end{aligned}$$

を得る。よって、$d \circ d = 0$ が成り立つ。 □

補題 4.12. 任意の $\omega_1 \in \Omega^p(U)$、$\omega_2 \in \Omega^q(U)$ に対して、

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2$$

である。

証明. まず、$p = q = 0$ のとき、$\omega_1 = f$ と $\omega_2 = g$ が滑らかな関数で、補題 4.9 より、

$$\begin{aligned}
d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d(fg) &= \frac{\partial(fg)}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial(fg)}{\partial x_n}dx_n \\
&= (\frac{\partial f}{\partial x_1}g + f\frac{\partial g}{\partial x_1})dx_1 + \cdots + (\frac{\partial f}{\partial x_n}g + f\frac{\partial g}{\partial x_n})dx_n \\
&= \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n\Big)g + f\Big(\frac{\partial g}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial g}{\partial x_n}dx_n\Big) \\
&= d\omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge d\omega_2
\end{aligned}$$

が分かる。一般的に、$\omega_1 = f \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$、$\omega_2 = g \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q}$ とすればよい。そのとき、$\omega_1 \wedge \omega_2 = fg \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q}$ なので、補題 4.10 より、

$$\begin{aligned}
d(\omega_1 \wedge \omega_2) &= d(fg) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q} \\
&= (df \wedge g + f \wedge dg) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q} \\
&= df \wedge g \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q} \\
&\quad + f \wedge dg \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q} \\
&= df \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge g \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q} \\
&\quad + (-1)^p f \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dg \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q} \\
&= d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2
\end{aligned}$$

が成り立つ。これで、補題を示した。 □

定義 4.13. $\mathbb{R}$ 上微分次数つき代数 (A^*, d) とは、次数つき反可換代数 A^* と次の性質 (i)–(ii) を満たす線形写像 $d\colon A^p \to A^{p+1}$（$p \geqslant 0$）を合わせてものである。

(i) 「微分」任意の $p \geqslant 0$ に対して、合成写像 $d \circ d\colon A^p \to A^{p+2}$ はゼロ写像と等しい。

(ii) 「ライプニッツの公式」任意の $p, q \geqslant 0$ と $a_1 \in A^p$、$a_2 \in A^q$ に対して、

$$d(a_1 \cdot a_2) = (da_1) \cdot a_2 + (-1)^p a_1 \cdot (da_2)$$

である。

定義 **4.14.** 開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ において、次数つき反可換代数 $\Omega^*(U)$ と外微分で定義された線形写像 $d\colon \Omega^p(U) \to \Omega^{p+1}(U)$（$p \geqslant 0$）を合わせてものは、$U$ 上ド・ラーム複体と呼ばれ、$(\Omega^*(U), d)$ または単に $\Omega^*(U)$ と書かれる。

補題 4.11 と 4.12 より、次の定理が成り立つ。

定理 **4.15.** 任意の開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ に対して、U 上ド・ラーム複体 $(\Omega^*(U), d)$ は、$\mathbb{R}$ 上微分次数つき代数である。 □

例 4.16. 開集合 $U \subset \mathbb{R}^3$ 上ド・ラーム複体

$$\Omega^0(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U) \xrightarrow{d} \Omega^2(U) \xrightarrow{d} \Omega^3(U)$$

を計算してみる。まず、$f \in \Omega^0(U)$ に対して、補題 4.9 より、

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \wedge dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \wedge dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \wedge dx_3$$

である。つづいて、任意の $\omega \in \Omega^1(U)$ を、

$$\omega = f_1 \wedge dx_1 + f_2 \wedge dx_2 + f_3 \wedge dx_3$$

で表すと、外微分と外積の性質より、

$$\begin{aligned} d\omega = &\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) \wedge dx_2 \wedge dx_3 - \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right) \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\ &+ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) \wedge dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

が分かる。最後に、任意の $\omega \in \Omega^2(U)$ を、

$$\omega = g_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - g_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + g_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2$$

で表すと、

$$d\omega = \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3}{\partial x_3}\right) \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

が成り立つ。このように、外微分と外積から、勾配と回転、発散を得る。

5　ド・ラームコホモロジー

開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ と U 上ド・ラーム複体 $(\Omega^*(U), d)$ を考える。外微分 d に関して、$d \circ d$ はゼロ写像であるため、任意の $p \geqslant 0$ に対して、

$$\mathrm{im}(d\colon \Omega^{p-1}(U) \to \Omega^p(U)) \subset \ker(d\colon \Omega^p(U) \to \Omega^{p+1}(U))$$

が分かる。

定義 **5.1.** 開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$、$p \geqslant 0$ において、ド・ラームコホモロジー群$H^p(U)$ は、次のように定義された商ベクトル空間のものである。

$$H^p(U) = \ker(d\colon \Omega^p(U) \to \Omega^{p+1}(U))\big/\,\mathrm{im}(d\colon \Omega^{p-1}(U) \to \Omega^p(U))$$

注 5.2. (1) $\omega \in \ker(d\colon \Omega^p(U) \to \Omega^{p+1}(U))$ は U 上閉微分形式、$\omega \in \mathrm{im}(d\colon \Omega^{p-1}(U) \to \Omega^p(U))$ は U 上完全微分形式と呼ばれる。よって、ド・ラームコホモロジー群 $H^p(U)$ がゼロであることと全ての U 上閉微分形式が完全微分形式であることは同値である。

(2) 閉微分形式 ω を含むコホモロジー類は、次のようにも書かれる。

$$[\omega] = \omega + \mathrm{im}(d\colon \Omega^{p-1}(U) \to \Omega^p(U)) \in H^p(U)$$

(3) ベクトル空間 $H^p(U)$（$p \geqslant 0$）と以下のように定める線形写像 $\eta\colon \mathbb{R} \to H^0(U)$、双線形写像 $\mu_{p,q}\colon H^p(U) \times H^q(U) \to H^{p+q}(U)$（$p, q \geqslant 0$）は、$\mathbb{R}$ 上次数つき反可換代数である。

$$\eta(\lambda) = [\text{定置写像 } x \mapsto \lambda], \qquad \mu_{p,q}([\omega_1], [\omega_2]) = [\omega_1 \wedge \omega_2]$$

ここで、コホモロジー類 $[\omega_1 \wedge \omega_2]$ は、がうまく定義されたことを確認する必要がある。まず、

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2 = 0$$

ため、$\omega_1 \wedge \omega_2$ は閉微分形式であることが分かる。さらに、

$$\begin{aligned}(\omega_1 + d\tau_1) \wedge (\omega_2 + d\tau_2) &= \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge d\tau_2 + d\tau_1 \wedge \omega_2 + d\tau_1 \wedge d\tau_2 \\ &= \omega_1 \wedge \omega_2 + d\big((-1)^p \omega_1 \wedge \tau_2 + \tau_1 \wedge \omega_2 + \tau_1 \wedge d\tau_2\big)\end{aligned}$$

ため、$\omega_1 \wedge \omega_2$ を含むコホモロジー類 $[\omega_1 \wedge \omega_2]$ は、ω_1、ω_2 を含むコホモロジー類 $[\omega_1]$、$[\omega_2]$ しかによらない。よって、写像 $\mu_{p,q}$ はうまく定義されたことを示した。

定義 5.3. 開集合 $U_1 \subset \mathbb{R}^m$ と $U_2 \subset \mathbb{R}^n$、滑らかな写像 $\phi\colon U_1 \to U_2$ において、次のように定める線形写像 $\Omega^p(\phi)\colon \Omega^p(U_2) \to \Omega^p(U_1)$ は、ϕ で誘導された写像と呼ばれ、ϕ^* とも書かれる。

$$\Omega^p(\phi)(\omega)(x) = \mathrm{Alt}^p(D_x\phi) \circ \omega(\phi(x))$$

線形写像 $\mathrm{Alt}^p(D_x\phi)$ の定義を想起し、定義 5.3 は次のようにも表される。

$$\Omega^p(\phi)(\omega)(x)(v_1, \ldots, v_p) = \omega(\phi(x))((D_x\phi)(v_1), \ldots, (D_x\phi)(v_p))$$

補題 5.4. 誘導された写像は、次の性質を満たす。

(i) $\Omega^p(\psi \circ \phi) = \Omega^p(\phi) \circ \Omega^p(\psi)$

(ii) $\Omega^p(\mathrm{id}_U) = \mathrm{id}_{\Omega^p(U)}$

証明. 性質 (ii) は、直ちに定義 5.3 から成り立つので、性質 (i) を示す。

$$\begin{aligned}
(\Omega^p(\phi) \circ \Omega^p(\psi))(\omega)(x) &\overset{(1)}{=} \mathrm{Alt}^p(D_x\phi) \circ \Omega^p(\psi)(\omega)(\phi(x)) \\
&\overset{(2)}{=} \mathrm{Alt}^p(D_x\phi) \circ \mathrm{Alt}^p(D_{\phi(x)}\psi) \circ \omega(\psi(\phi(x)) \\
&\overset{(3)}{=} \mathrm{Alt}^p(D_{\phi(x)}\psi \circ D_x\phi) \circ \omega(\psi(\phi(x)) \\
&\overset{(4)}{=} \mathrm{Alt}^p(D_x(\psi \circ \phi)) \circ \omega((\psi \circ \phi)(x)) \\
&\overset{(5)}{=} \Omega^p(\psi \circ \phi)(\omega)(x)
\end{aligned}$$

ここで、(1) と (2)、(5) は、定義 5.3 から成り立ち、(3) は、$\mathrm{Alt}^p(-)$ が反変関手であることから成り立ち、(4) は、連鎖律の公式から成り立つ。 □

系 5.5. 微分同相写像 $\phi\colon U_1 \to U_2$ で誘導された線形写像

$$\Omega^p(\phi)\colon \Omega^p(U_2) \to \Omega^p(U_1)$$

は、同型である。

証明. 滑らかな写像 $\phi\colon U_1 \to U_2$ が微分同相写像であるとは、次の性質を満たす滑らかな写像 $\psi\colon U_2 \to U_1$ が存在することである。

$$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{U_1}$$

$$\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{U_2}$$

このとき、補題 5.4 より、

$$\Omega^p(\phi)\circ\Omega^p(\psi)=\Omega^p(\psi\circ\phi)=\Omega^p(\mathrm{id}_{U_1})=\mathrm{id}_{\Omega^p(U_1)}$$
$$\Omega^p(\psi)\circ\Omega^p(\phi)=\Omega^p(\phi\circ\psi)=\Omega^p(\mathrm{id}_{U_2})=\mathrm{id}_{\Omega^p(U_2)}$$

が成り立つ。すなわち、$\Omega^p(\phi)$ は同型である。 □

例 5.6. 開集合 $U_1\subset\mathbb{R}^m$ と $U_2\subset\mathbb{R}^n$、滑らかな写像 $\phi=(\phi_1,\dots,\phi_n)\colon U_1\to U_2$ において、滑らかな写像 $\phi_i\colon U_1\to\mathbb{R}$（$1\leqslant i\leqslant n$）は、$\Omega^0(U_1)$ の元で、

$$\Omega^1(\phi)(dx_i)=d\phi_i$$

である。なぜなら、定義 5.3 より、任意の $x\in U_1$、$v=(v_1,\dots,v_m)\in\mathbb{R}^m$ に対して、

$$\begin{aligned}\Omega^1(\phi)(dx_i)(x)(v)=dx_i(\phi(x))((D_x\phi)(v))&=e_i^*\Big(\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial\phi_k}{\partial x_l}(x)v_l\Big)e_k\Big)\\&=\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial\phi_i}{\partial x_l}(x)v_l=\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial\phi_i}{\partial x_l}(x)e_l^*(v)=d\phi_i(x)(v)\end{aligned}$$

を得る。

定理 **5.7.** 任意の開集合 $U_1\in\mathbb{R}^m$ と $U_2\subset\mathbb{R}^n$、滑らかな写像 $\phi\colon U_1\to U_2$ に対して、誘導された写像は次の性質 (i)–(iii) を満たす。

(i) 任意の $\omega\in\Omega^p(U_2)$ と $\tau\in\Omega^q(U_2)$ に対して、

$$\Omega^{p+q}(\phi)(\omega\wedge\tau)=\Omega^p(\phi)(\omega)\wedge\Omega^q(\phi)(\tau)$$

である。

(ii) 任意の $f\in\Omega^0(U_2)$ に対して、

$$\Omega^0(\phi)(f)=f\circ\phi$$

である。

(iii) 任意の $\omega\in\Omega^p(U_2)$ に対して、

$$d(\Omega^p(\phi)(\omega))=\Omega^{p+1}(\phi)(d\omega)$$

である。

それで、性質 (i)–(iii) を満たす線形写像 $L\colon \Omega^*(U_2) \to \Omega^*(U_1)$ には、必ず $L = \Omega^*(\phi)$ である。

証明. (ii) が直ちに定義 5.3 から成り立つので、(i) と (iii) を示す。

まず (i) を示す。任意の $x \in U_2$、$v_1, \dots, v_{p+q} \in \mathbb{R}^m$ に対して、

$$\begin{aligned}
&\Omega^{p+q}(\phi)(\omega \wedge \tau)(x)(v_1, \dots, v_{p+q}) \\
&= (\omega \wedge \tau)(\phi(x))((D_x\phi)(v_1), \dots, (D_x\phi)(v_{p+q})) \\
&= \sum_{\sigma \in S_{p,q}} \operatorname{sgn}(\sigma) \Big(\omega(\phi(x))((D_x\phi)(v_{\sigma(1)}), \dots, (D_x\phi)(v_{\sigma(p)})) \\
&\qquad\qquad \tau(\phi(x))((D_x\phi)(v_{\sigma(p+1)}), \dots, \tau(\phi(x))((D_x\phi)(v_{\sigma(p+q)})) \Big) \\
&= \sum_{\sigma \in S_{p,q}} \operatorname{sgn}(\sigma) \Omega^p(\phi)(\omega)(x)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \Omega^q(\phi)(\tau)(x)(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)}) \\
&= (\Omega^p(\phi)(\omega) \wedge \Omega^q(\phi)(\tau))(x)(v_1, \dots, v_{p+q})
\end{aligned}$$

ため、(i) が成り立つ。

次に (iii) を示す。まず、$p = 0$ のとき、任意の $f \in \Omega^0(U_2)$ に対して、

$$\begin{aligned}
\Omega^1(\phi)(df) &\overset{(1)}{=} \Omega^1(\phi)\big(\sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \wedge dx_k\big) \overset{(2)}{=} \sum_{k=1}^n \Omega^0(\phi)(\frac{\partial f}{\partial x_k}) \wedge \Omega^1(\phi)(dx_k) \\
&\overset{(3)}{=} \sum_{k=1}^n (\frac{\partial f}{\partial x_k} \circ \phi) \wedge d\phi_k \overset{(4)}{=} \sum_{k=1}^n (\frac{\partial f}{\partial x_k} \circ \phi) \wedge \big(\sum_{l=1}^m \frac{\partial \phi_k}{\partial x_l} \wedge dx_l\big) \\
&\overset{(5)}{=} \sum_{l=1}^m \Big(\sum_{k=1}^n (\frac{\partial f}{\partial x_k} \circ \phi) \cdot \frac{\partial \phi_k}{\partial x_l}\Big) \wedge dx_l \overset{(6)}{=} \sum_{l=1}^m \frac{\partial (f \circ \phi)}{\partial x_l} \wedge dx_l \\
&\overset{(7)}{=} d(f \circ \phi) \overset{(8)}{=} d(\Omega^0(\phi)(f))
\end{aligned}$$

を得る。ここで、(1) と (4)、(7) は補題 4.9 から成り立ち、(2) は (i) から成り立ち、(3) と (8) は性質 (ii) と例 5.6 から成り立ち、(6) は連鎖律の公式より成り立つ。一般的に、

$$\omega = f \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

で表すと、

$$
\begin{aligned}
\Omega^{p+1}(\phi)(d\omega) &\overset{(1)}{=} \Omega^{p+1}(\phi)(df \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}) \\
&\overset{(2)}{=} \Omega^1(\phi)(df) \wedge \Omega^1(\phi)(dx_{i_1}) \wedge \cdots \wedge \Omega^1(\phi)(dx_{i_p}) \\
&\overset{(3)}{=} d(\Omega^0(\phi)(f)) \wedge d(\Omega^0(\phi)(x_{i_1})) \wedge \cdots \wedge d(\Omega^0(\phi)(x_{i_p})) \\
&\overset{(4)}{=} d\big(\Omega^0(\phi)(f) \wedge d(\Omega^0(\phi)(x_{i_1})) \wedge \cdots \wedge d(\Omega^0(\phi)(x_{i_p}))\big) \\
&\overset{(5)}{=} d\big(\Omega^0(\phi)(f) \wedge \Omega^1(\phi)(dx_{i_1}) \wedge \cdots \wedge \Omega^1(\phi)(dx_{i_p})\big) \\
&\overset{(6)}{=} d\big(\Omega^p(\phi)(f \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p})\big) \\
&\overset{(7)}{=} d\big(\Omega^p(\phi)(\omega)\big)
\end{aligned}
$$

であることが分かる。ここで、(1) と (4) は定理 4.15 から成り立ち、(2) と (6) は性質 (i) から成り立ち、(3) と (5) は性質 (iii) から成り立つ。これで、(iii) を示した。 □

注 5.8. 定理 5.7 の性質 (i)–(iii) も次のように書かれる。

(i) 任意の $\omega \in \Omega^p(U_2)$ と $\tau \in \Omega^q(U_2)$ に対して、$\phi^*(\omega \wedge \tau) = \phi^*(\omega) \wedge \phi^*(\tau)$ である。

(ii) 任意の $f \in \Omega^0(U_2)$ に対して、$\phi^*(f) = f \circ \phi$ である。

(iii) 任意の $\omega \in \Omega^p(U_2)$ に対して、$d(\phi^*(\omega)) = \phi^*(d\omega)$ である。

定義 **5.9.** 開集合 $U_1 \subset \mathbb{R}^m$ と $U_2 \in \mathbb{R}^n$、滑らかな写像 $\phi\colon U_1 \to U_2$ に対して、線形写像

$$
H^p(\phi)\colon H^p(U_2) \to H^p(U_1), \qquad H^p([\omega]) = [\Omega^p(\phi)(\omega)]
$$

は、ϕ で誘導された写像と呼ばれ、$H^p(\phi)$ または ϕ^* と書かれる。

注 5.10. 任意の閉微分形式 $\omega \in \Omega^p(U_2)$ と微分形式 $\tau \in \Omega^{p-1}(U_2)$ に対して、定理 5.7 より、次の方程式が成り立つ。

$$
\begin{gathered}
d(\Omega^p(\phi)(\omega)) = \Omega^{p+1}(d\omega) = \Omega^{p+1}(0) = 0 \\
\Omega^p(\phi)(\omega + d\tau) = \Omega^p(\phi)(\omega) + d(\Omega^{p+1}(\tau))
\end{gathered}
$$

よって、誘導された写像 $H^p(\phi)$ は、うまく定義されたことが分かる。

補題 5.4 と定理 5.7 より、次の定理が成り立つ。

定理 **5.11.** (i) 任意の開集合 $U_1 \subset \mathbb{R}^k$ と $U_2 \subset \mathbb{R}^m$、$U_3 \subset \mathbb{R}^n$、滑らかな写像 $\phi\colon U_1 \to U_2$ と $\psi\colon U_2 \to U_3$ に対して、

$$H^p(\psi \circ \phi) = H^p(\phi) \circ H^p(\psi)$$

である。

(ii) 任意の開集合 $U \subset \mathbb{R}^k$ に対して、

$$H^p(\mathrm{id}_U) = \mathrm{id}_{H^p(U)}$$

である。

(iii) 任意の開集合 $U_1 \subset \mathbb{R}^k$ と $U_2 \subset \mathbb{R}^n$、滑らかな写像 $\phi\colon U_1 \to U_2$ に対して、図式

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, equal] & H^0(U_2) \arrow[d, "H^0(\phi)"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, "\eta"] & H^0(U_1) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H^p(U_2) \times H^q(U_2) \arrow[r, "\mu_{p,q}"] \arrow[d, "H^p(\phi)\times H^q(\phi)"] & H^{p+q}(U_2) \arrow[d, "H^{p+q}(\phi)"] \\ H^p(U_1) \times H^q(U_1) \arrow[r, "\mu_{p,q}"] & H^{p+q}(U_1) \end{tikzcd}$$

が可換になる。

注 5.12. 定理 5.11 で、性質 (i)–(ii) は、$H^p(-)$ が反変関手であることを示し、性質 (iii) は、$H^*(\phi)$ が $\mathbb{R}$ 上次数つき代数の準同型であることを示す。よって、性質 (i)–(iii) を合わせてことは、ド・ラームコホモロジーが、次のような反変関手であることを示す。

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{ユークリッド空間の開集合} \\ \text{滑らか写像} \end{array} \right\} \xrightarrow{H^*(-)} \left\{ \begin{array}{c} \text{体 } \mathbb{R} \text{ 上次数つき可換代数} \\ \text{その準同型} \end{array} \right\}$$

6　ポアンカレの補題

以下の定理 6.4（ポアンカレの補題）で、星形開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ のド・ラームコホモロジー群を計算する。この結果は、定理 1.5 の一般化である。

補題 **6.1.** 次の性質 (i)–(iii) を満たす滑らかな関数 $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在する。

(i) 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して、$0 \leqslant \psi(t) \leqslant 1$ である。

(ii) 任意の $t \leqslant 0$ に対して、$\psi(t) = 0$ である。

(iii) 任意の $t \geqslant 1$ に対して、$\psi(t) = 1$ である。

証明. $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を、次のように定める。

$$\psi(t) = \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)}$$

ここで、$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は、

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t \leqslant 0) \\ \exp(-1/t) & (t \geqslant 0) \end{cases}$$

で定義された写像である。明らかに、$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は滑らかなであることを示すと、補題が成り立つ。そのために、任意の $n \geqslant 0$ に対して、

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f^{(n)}(t)}{t} = 0$$

であることを示せばよい。しかし、$t > 0$ のとき、f の高階導関数は、次のように表される。

$$f^{(n)}(t) = p_n(1/t) \exp(-1/t) \qquad (t > 0, n \geqslant 0)$$

ここで、$p_n(X)$（$n \geqslant 0$）は、帰納法を用い、次のように定める多項式である。

$$\begin{aligned} p_0(X) &= 1 \\ p_n(X) &= -X^2(p_{n-1}(X) + p'_{n-1}(X)) \qquad (n \geqslant 1) \end{aligned}$$

よって、

$$\lim_{t \to 0^+} \bigl((1/t)^k \exp(-1/t)\bigr) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^k}{\exp(x)} = 0$$

ため、補題が成り立つ。 □

補題 6.2. 滑らかな関数 $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ において、$\phi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ を $\phi(x,t) = \psi(t)x$ で定める滑らかな写像とする。そのとき、誘導された写像

$$\phi^*\colon \Omega^p(\mathbb{R}^n) \to \Omega^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$$

が、次のように与えられた。

$$\phi^*(dx_i) = \psi'(t)x_i \wedge dt + \psi(t) \wedge dx_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

証明. 例 5.6 より、$\phi^*(dx_i) = d\phi_i$ であることが分かる。ここで、$\phi_i(x,t) = \psi(t)x_i$ ため、補題 4.9 より、補題が成り立つ。 □

定理 3.5 より、開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ に対して、任意の微分形式 $\omega \in \Omega^p(U)$ は、一意的に

$$\omega = \sum_I f_I \wedge dx_I \tag{6.3}$$

で表される。ここで、添え字 I は「$1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n$」を満たす整数の p 組 $(i_1, \ldots, i_p)$、$f_I \in \Omega^0(U)$、$dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \in \Omega^p(U)$ である。

定理 6.4 (ポアンカレの補題)**.** 任意の星形開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ に対して、

$$H^p(U) = \begin{cases} \mathbb{R} \cdot 1_U & (p = 0) \\ 0 & (p > 0) \end{cases}$$

である。ここで、$1_U\colon U \to \mathbb{R}$ は、$1_U(x) = 1$ で定める定関数である。

証明. 開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ は、原点 $0 \in \mathbb{R}^n$ に関して星形集合であることを仮定すればよい。以下、次の微分方程式 (6.6) を満たす線形写像

$$s^p\colon \Omega^p(U) \to \Omega^{p-1}(U) \qquad (p \geqslant 1) \tag{6.5}$$

を定める。

$$\begin{aligned} \eta\epsilon + s^1 d &= \mathrm{id}_{\Omega^0(U)} \qquad (p = 0) \\ ds^p + s^{p+1} d &= \mathrm{id}_{\Omega^p(U)} \qquad (p > 0) \end{aligned} \tag{6.6}$$

ここで、$\epsilon\colon \Omega^0(U) \to \mathbb{R}$ と $\eta\colon \mathbb{R} \to \Omega^0(U)$ は、それぞれ $\epsilon(\omega) = \omega(0)$ と $\eta(\lambda) = \lambda \cdot 1_U$ で定義された線形写像である。線形写像 s^p を用い、定理は次のように成り立つ。任意の閉微分形式 $\omega \in \Omega^0(U)$ に対して、

$$\omega = \mathrm{id}_{\Omega^0(U)}(\omega) = (\eta\epsilon + s^1 d)(\omega) = \eta(\omega(0)) = \omega(0) \cdot 1_U$$

が分かる。同様に、任意の閉微分形式 $\omega \in \Omega^p(U)$（$p > 0$）に対して、

$$\omega = \mathrm{id}_{\Omega^p(U)}(\omega) = (ds^p + s^{p+1}d)(\omega) = ds^p(\omega)$$

ため、コホモロジー類 $[\omega]$ はゼロであることが分かる。

以下、線形写像 s^p を定める。まず、補助の線形写像

$$\hat{s}^p \colon \Omega^p(U \times \mathbb{R}) \to \Omega^{p-1}(U) \qquad (p \geqslant 1)$$

を定義する。(6.3) より、任意の $\tau \in \Omega^p(U \times \mathbb{R})$ は、次のように一意的な表現を持つ。

$$\tau = \sum_I f_I(x,t) \wedge dx_I + \sum_J g_J(x,t) \wedge dt \wedge dx_J$$

ここで、添え字 I と J は、それぞれの「$1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n$」と「$1 \leqslant j_1 < \cdots < j_{p-1} \leqslant n$」を満たす整数の組 $(i_1, \ldots, i_p)$ と $(j_1, \ldots, j_{p-1})$ で、$f_I, g_J \in \Omega^0(U \times \mathbb{R})$ である。この表現を用い、線形写像 $\hat{s}^p \colon \Omega^p(U \times \mathbb{R}) \to \Omega^{p-1}(U)$ を、次のように定義する。

$$\hat{s}^p(\tau) = \sum_J \Big(\int_0^1 g_J(x,t)dt \Big) \wedge dx_J$$

このとき、

$$\begin{aligned} d\hat{s}^p(\tau) &= \sum_{i=1}^n \sum_J \Big(\int_0^1 \frac{\partial g_J(x,t)}{\partial x_i} dt \Big) \wedge dx_i \wedge dx_J \\ \hat{s}^{p+1}d(\tau) &= \sum_I \Big(\int_0^1 \frac{\partial f_I(x,t)}{\partial t} dt \Big) \wedge dx_I - \sum_{i=1}^n \sum_J \Big(\int_0^1 \frac{\partial g_J(x,t)}{\partial x_i} dt \Big) \wedge dx_i \wedge dx_J \end{aligned}$$

が分かる。よって、任意の $p \geqslant 1$ に対して、

$$\begin{aligned} (d\hat{s}^p + \hat{s}^{p+1}d)(\tau) &= \sum_I \Big(\int_0^1 \frac{\partial f_I(x,t)}{\partial t} dt \Big) \wedge dx_I \\ &= \sum_I f_I(x,1) \wedge dx_I - \sum_I f_I(x,0) \wedge dx_I \end{aligned} \tag{6.7}$$

を得る。次に、$\psi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を、補題 6.1 に於ける滑らかな写像とし、

$$\phi \colon U \times \mathbb{R} \to U, \qquad \phi(x,t) = \psi(t)x$$

で定める滑らかな写像を考える。(注：$U \subset \mathbb{R}^n$ は原点 0 に関して星形である仮定より、ϕ はうまく定義された写像である。）このとき、線形写像 (6.5) を、

$$s^p(\omega) = \hat{s}^p(\phi^*(\omega))$$

で定義する。

これから、このように定義した s^p は、性質 (6.6) を満たすことを示す。まず、$p \geqslant 1$ のとき、$\omega \in \Omega^p(U)$ を、$\omega = \sum_I h_I(x) \wedge dx_I$ で表すと、補題 6.2 と定理 5.7 より、$\tau = \phi^*(\omega)$ が、

$$\begin{aligned}
\tau &= \sum_I h_I(\psi(t)x) \wedge (\psi'(t)x_{i_1} \wedge dt + \psi(t) \wedge dx_{i_1}) \wedge \cdots \wedge (\psi'(t)x_{i_p} \wedge dt + \psi(t) \wedge dx_{i_p}) \\
&= \sum_I h_I(\psi(t)x)\psi(t)^p \wedge dx_I \\
&+ \sum_I \sum_{r=1}^{p} (-1)^{r-1} h_I(\psi(t)x)\psi(t)^{p-1}\psi'(t) \wedge dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{r-1}} \wedge dx_{i_{r+1}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}
\end{aligned}$$

で表される。よって、(6.7) より、任意の $p \geqslant 1$ に対して、

$$\begin{aligned}
(ds^p + s^{p+1}d)(\omega) &= d\hat{s}^p(\phi^*(\omega)) + \hat{s}^{p+1}(\phi^*(d\omega)) = (d\hat{s}^p + \hat{s}^{p+1}d)(\phi^*(\omega)) \\
&= \sum_I h_I(\psi(1)x)\psi(1)^p \wedge dx_I - \sum_I h_I(\psi(0)x)\psi(0)^p \wedge dx_I \\
&= \sum_I h_I(x) \wedge dx_I = \omega
\end{aligned}$$

を得る。最後に、任意の $f \in \Omega^0(U \times \mathbb{R})$ に対して、

$$\hat{s}^1 df = \int_0^1 \frac{\partial f(x, y)}{\partial t} dt = f(x, 1) - f(x, 0)$$

ため、任意の $h \in \Omega^0(U)$ に対して、

$$s^1 dh = \hat{s}^1 d(h \circ \phi) = h(\psi(1)x) - h(\psi(0)x) = h(x) - h(0)$$

が分かる。これで、定理を示した。 $\square$

定義 **6.8.** (i) ベクトル空間と線形写像からなる系列

$$\cdots \longrightarrow A^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} A^i \xrightarrow{d^i} A^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} A^{i+2} \longrightarrow \cdots$$

は、任意の i に対して $d^i \circ d^{i-1} = 0$ であるとき、コチェイン複体と呼ばれ、(A^i, d^i) または単に A^* と書かれる。

(ii) 任意の i に対して $\ker(d^i) = \mathrm{im}(d^{i-1})$ を満たすコチェイン複体 (A^i, d^i) は、完全系列または完全コチェイン複体と呼ばれる。

注 6.9. 任意の開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ に対して、ド・ラース複体、線形形式写像 η からなる系列

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\eta} \Omega^0(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^n(U) \longrightarrow 0$$

は、コチェイン複体である。ポアンカレの補題 6.4 より、U は星形のとき、このコチェイン複体が完全である。

定義 6.10. コチェイン複体 A^* と B^* において、チェイン写像 $\varphi\colon A^* \to B^*$ とは、次の図式が可換になるような線形写像 $\varphi^i\colon A^i \to B^i$ を合わせてものである。

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}"] \arrow[d, "\varphi^{i-1}"] & A^i \arrow[r, "d^i"] \arrow[d, "\varphi^i"] & A^{i+1} \arrow[r, "d^{i+1}"] \arrow[d, "\varphi^{i+1}"] & A^{i+2} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^{i+2}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}"] & B^i \arrow[r, "d^i"] & B^{i+1} \arrow[r, "d^{i+1}"] & B^{i+2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

例 6.11. 開集合 $U \subset \mathbb{R}^3$ に対して、例 4.16 より、次のように定義された写像 φ^i を合わせてのは、チェイン写像となる。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^0(U) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\varphi^0"] & \Omega^1(U) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\varphi^1"] & \Omega^2(U) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\varphi^2"] & \Omega^3(U) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^\infty(U,\mathbb{R}) \arrow[r, "\mathrm{grad}"] & C^\infty(U,\mathbb{R}^3) \arrow[r, "\mathrm{rot}"] & C^\infty(U,\mathbb{R}^3) \arrow[r, "\mathrm{div}"] & C^\infty(U,\mathbb{R}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ここで、φ^0 は恒道写像、$\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3$ はそれぞれ

$$\varphi^1(f_1 \wedge dx_1 + f_2 \wedge dx_2 + f_3 \wedge dx_3) = (f_1, f_2, f_3)$$
$$\varphi^2(g_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - g_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + g_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2) = (g_1, g_2, g_3)$$
$$\varphi^3(h \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) = h$$

で定める線形写像である。

7　コチェイン複体とそのコホモロジー

次のような完全系列は、短完全系列と呼ばれる。

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

この系列が完全であることは、次の性質 (i)–(iii) と同値である。

(i) f は単射である。

(ii) $\mathrm{im}(f) = \ker(g)$ である。

(iii) g は全射である。

ここで、像 $\mathrm{im}(f)$ とカネル $\ker(f)$ は、

$$\mathrm{im}(f) = \{f(a) \mid a \in A\} \subset B$$
$$\ker(g) = \{b \in B \mid g(b) = 0\} \subset B$$

で定める。

補題 **7.1.** ベクトル空間と線形写像からなる短完全系列

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

を固定する。基底 $S \subset \{a_i \mid i \in I\} \subset A$ と $T \subset \{c_j \mid j \in J\} \subset C$ に対して、次のように選ばれた部分集合 $S\tilde{T} \subset B$ は、B の基底となる。

$$S\tilde{T} = \{f(a_i) \mid i \in I\} \cup \{b_j \mid j \in J\} \subset B, \qquad g(b_j) = c_j$$

特に、A と C が有限次元のとき、B も有限次元で、

$$\dim(B) = \dim(A) + \dim(C)$$

である。

証明. まず、$S\tilde{T} \subset B$ は線形独立であることを示す。線形関係

$$\sum_{i \in I} \lambda_i f(a_i) + \sum_{j \in J} \mu_j b_j = 0$$

が与えられたとき、任意の λ_i と μ_j が 0 であることを示せば良い。

$$0 = g\big(\sum_{i\in I}\lambda_i f(a_i) + \sum_{j\in J}\mu_j b_j\big) = \sum_{i\in I}\lambda_i g(f(a_i)) + \sum_{j\in J}\mu_j g(b_j) = \sum_{j\in J}\mu_j c_j$$

なので、T は線形独立であるため、任意の μ_j は 0 であることが分かる。さらに、

$$0 = \sum_{i\in I}\lambda_i f(a_i) + \sum_{j\in J}\mu_j b_j = f\big(\sum_{i\in I}\lambda_i a_i\big)$$

を得るので、f は単射であるため、

$$\sum_{i\in I}\lambda_i a_i = 0$$

が分かる。$S \subset A$ は線形独立であるため、任意の λ_i も 0 であることが成り立つ。これで、$S\tilde{T} \subset B$ は線形独立であることを示した。

以下、$S\tilde{T}$ が B を生成することを示す。任意の $b \in B$ が $S\tilde{T}$ の線形結合で表されることを示せば良い。まず、T が C を生成するため、

$$g(b) = \sum_{j\in J}\mu_j c_j$$

で表される。さらに、

$$g\big(b - \sum_{j\in J}\mu_j b_j\big) = g(b) - \sum_{j\in J}\mu_j c_j = 0$$

ため、

$$b - \sum_{j\in J}\mu_j b_j = f(a) = f\big(\sum_{i\in I}\lambda_i a_i\big) = \sum_{i\in I}\lambda_i f(a_i)$$

で表されることが分かる。なぜなら、$\ker(g) = \mathrm{im}(f)$ で、S が A を生成する。よって、

$$b = \sum_{i\in I}\lambda_i f(a_i) + \sum_{j\in J}\mu_j b_j$$

で表されることを示した。すなわち、$S\tilde{T}$ が B を生成することをしめした。 □

例 7.2. 任意の線形写像 $f\colon A \to B$ に対して、次の短完全系列が成り立つ。

$$0 \longrightarrow \ker(f) \longrightarrow A \xrightarrow{f} \mathrm{im}(f) \longrightarrow 0$$

特に、A は有限次元のとき、$\dim(A) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f))$ が分かる。

定義 7.3. コチェイン複体 $A^* = (A^i, d^i)$ において、商ベクトル空間

$$H^p(A^*) = \ker(d^p\colon A^p \to A^{p+1}) / \operatorname{im}(d^{p-1}\colon A^{p-1} \to A^p)$$

は、A^* の p 次コホモロジー空間と呼ばれる。$\ker(d^p\colon A^p \to A^{p+1})$ と像 $\operatorname{im}(d^{p-1}\colon A^{p-1} \to A^p)$ の元は、それぞれ A^* の p 次コサイクルと p 次コバウンダリーと呼ばれ、$H^p(A^*)$ の元は A^* の p 次コホモロジー類と呼ばれる。p 次コサイクル a を含むコホモロジー類は、

$$[a] = a + \operatorname{im}(d^{p-1}\colon A^{p-1} \to A^p) \in H^p(A^*)$$

とも書かれる。

例 7.4. ド・ラーム複体 $\Omega^*(U)$ はコチェイン複体、コホモロジーベクトル空間

$$H^p(U) = H^p(\Omega^*(U))$$

は、ド・ラームコホモロジー群である。さらに、$\Omega^*(U)$ の p 次コサイクルと p 次コバウンダリーは、それぞれ U 上の閉微分形式と完全微分形式である。

定義 7.5. チェイン写像 $\varphi\colon A^* \to B^*$ において、

$$\varphi^* = H^p(\varphi)\colon H^p(A^*) \to H^p(B^*), \qquad H^p(\varphi)([a]) = [\varphi^p(a)]$$

で定義された写像は、φ で誘導された写像と呼ばれ、φ^* または $H^p(\varphi)$ と書かれる。

注 7.6. チェイン写像 $\varphi\colon A^* \to B^*$ で誘導された写像 $H^p(\varphi)\colon H^p(A^*) \to H^p(B^*)$ は、うまく定義された線形写像であることを示す。まず、A^* の p 次コサイクル a に対して、

$$d^p(\varphi^p(a)) = \varphi^p(d^p(a)) = \varphi^p(0) = 0$$

ため、$\phi^p(a)$ は B^* の p 次コサイクルである。さらに、A^* の p 次コサイクル a_1、a_2 は、同じコホモロジー類 $[a_1] = [a_2]$ を表現するとき、$a_1 - a_2 = d^{p-1}(x)$ を満たす $x \in A^{p-1}$ が存在する。このとき、

$$\varphi^p(a_1) - \varphi^p(a_2) = \varphi^p(a_1 - a_2) = \varphi^p(d^{p-1}(x)) = d^p(\varphi^p(x))$$

ため、p 次コサイクル $\varphi^p(a_1)$、$\varphi^p(a_2)$ も同じコホモロジー類 $[\varphi^p(a_1)] = [\varphi^p(a_2)]$ を表現することが分かる。

定義 7.7. コチェイン複体とチェイン写像からなる系列

$$0 \longrightarrow A^* \xrightarrow{\varphi} B^* \xrightarrow{\psi} C^* \longrightarrow 0$$

は、任意の i に対して、

$$0 \longrightarrow A^i \xrightarrow{\varphi^i} B^i \xrightarrow{\psi^i} C^i \longrightarrow 0$$

は短完全系列であるとき、コチェイン複体の短完全系列と呼ばれる。

補題 7.8. コチェイン複体の短完全系列

$$0 \longrightarrow A^* \xrightarrow{\varphi} B^* \xrightarrow{\psi} C^* \longrightarrow 0$$

に対して、誘導された写像からなる系列

$$H^p(A^*) \xrightarrow{\varphi^*} H^p(B^*) \xrightarrow{\psi^*} H^p(C^*)$$

は、完全系列である。

証明. $\mathrm{im}(\varphi^*) = \ker(\psi^*)$ を示せば良い。まず、任意のコホモロジー類 $[a] \in H^p(A^*)$ に対して、

$$(\psi^* \circ \varphi^*)([a]) = \psi^*(\varphi^*([a])) = \psi^*([\varphi^p(a)]) = [\psi^p(\varphi^p(a)] = [0]$$

ため、$\mathrm{im}(\varphi^*) \subset \ker(\psi^*)$ を得る。次に、$[b] \in \ker(\psi^*)$ のとき、$\psi^p(b) = d^{p-1}(c)$ を満たす $c \in C^{p-1}$ が存在することが分かる。それに、$\psi^{p-1} \colon B^{p-1} \to C^{p-1}$ は全射であるため、$\psi^{p-1}(b_1) = c$ を満たす $b_1 \in B^{p-1}$ が存在することが分かる。それから、

$$\begin{aligned}\psi^p(b - d^{p-1}(b_1)) &= \psi^p(b) - \psi^p(d^{p-1}(b_1)) = \psi^p(b) - d^{p-1}(\psi^{p-1}(b_1)) \\ &= \psi^p(b) - d^{p-1}(c) = \psi^p(b) - \psi^p(b) = 0\end{aligned}$$

なので、$\varphi^p(a) = b - d^{p-1}(b_1)$ を満たす $a \in A^p$ が存在する。この $a \in A^p$ はコサイクルである。なぜなら、φ^{p+1} は単射で、

$$\varphi^{p+1}(d^p(a)) = d^p(\varphi^p(a)) = d^p(b - d^{p-1}(b_1)) = d^p(b) - (d^p \circ d^{p-1})(b_1) = 0 - 0 = 0$$

である。よって、$\varphi^*([a]) = [b]$ を満たすコホモロジー類 $[a] \in H^p(A^*)$ が存在することを示した。すなわち、$\ker(\psi^*) \subset \mathrm{im}(\varphi^*)$ も得る。 □

補題 7.8 では、誘導された写像 φ^* には、一般的に単射ではない。同様に、誘導われた写像 ψ^* には、一般的に全射ではない。よって、誘導された写像からなる系列には、一般的に短完全系列ではない。

定義 **7.9.** コチェイン複体の短完全系列

$$0 \longrightarrow A^* \xrightarrow{\varphi} B^* \xrightarrow{\psi} C^* \longrightarrow 0$$

に関して、境界準同型と呼ばれるのは、次のように定義された線形写像である。

$$\partial^* \colon H^p(C^*) \to H^{p+1}(A^*), \qquad \partial^*([c]) = [(\phi^{p+1})^{-1}(d^p((\psi^p)^{-1}(c)))]$$

注 7.10. 次の図式を考え、境界準同型がうまく定義された線形写像であることを示す。

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 \arrow[r] & A^{p+2} \arrow[r, "\varphi^{p+2}"] \arrow[u] & B^{p+2} \arrow[r, "\psi^{p+2}"] \arrow[u] & C^{p+2} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^{p+1} \arrow[r, "\varphi^{p+1}"] \arrow[u, "d^{p+1}"'] & B^{p+2} \arrow[r, "\psi^{p+1}"] \arrow[u, "d^{p+1}"'] & C^{p+1} \arrow[r] \arrow[u, "d^{p+1}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^{p} \arrow[r, "\varphi^{p}"] \arrow[u, "d^{p}"'] & B^{p} \arrow[r, "\psi^{p}"] \arrow[u, "d^{p}"'] & C^{p} \arrow[r] \arrow[u, "d^{p}"'] & 0 \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

境界準同型の定義より、p 次コサイクル $c \in C^p$ が与えられたとき、まず $\psi^p(b) = c$ を満たす $b \in B^p$ を選ぶ。このとき、

$$\psi^{p+1}(d^p(b)) = d^p(\psi^p(b)) = d^p(c) = 0$$

ため、$\varphi^{p+1}(a) = d^p(b)$ を満たす $a \in A^{p+1}$ が、一意的に存在する。さらに、写像 φ^{p+2} は単射なので、次の計算より、a は $p+1$ 次コサイクルであることが分かる。

$$\varphi^{p+2}(d^{p+1}(a)) = d^{p+1}(\varphi^{p+1}(a)) = d^{p+1}(d^p(b)) = 0$$

よって、コホモロジー類 $[a] \in H^{p+1}(A^*)$ が成り立つ。このコホモロジー類は、選んだ $b \in B^p$ によらないことを確認する必要がある。それぞれ $\psi^p(b_1) = c$ と $\psi^p(b_2) = c$ を満たす $b_1, b_2 \in B^p$ とそれらに対応するコサイクル $a_1, a_2 \in A^{p+1}$ を固定する。このとき、

$$\psi^p(b_1 - b_2) = \psi^p(b_1) - \psi^p(b_2) = 0$$

ため、$\varphi^p(a') = b_1 - b_2$ を満たす $a' \in A^p$ が存在する。さらに、

$$\begin{aligned}\varphi^{p+1}(d^p(a')) &= d^p(\varphi^p(a')) = d^p(b_1 - b_2) = d^p(b_1) - d^p(b_2)\\ &= \varphi^{p+1}(a_1) - \varphi^{p+1}(a_2) = \varphi^{p+1}(a_1 - a_2)\end{aligned}$$

なので、$d^p(a') = a_1 - a_2$ であることが分かる。よって、

$$[a_1] - [a_2] = [a_1 - a_2] = [d^p(a')] = 0$$

が成り立つ。これで、境界準同型はうまく定義された写像であることを示した。

最後に、境界準同型は線形写像であることを示す。境界準同型の定義より、$\psi^p(b_1) = c_1$ と $\psi^p(b_2) = c_2$、$\varphi^{p+1}(a_1) = d^p(b_1)$、$\varphi^{p+1}(a_2) = d^p(b_2)$ を満たす $b_1, b_2 \in B^p$、$a_1, a_2 \in A^{p+1}$ において、$\partial^*([c_1]) = [a_1]$ と $\partial^*([c_2]) = [a_2]$ である。さらに、$\psi^p(b_1 + b_2) = c_1 + c_2$ と $\varphi^{p+1}(a_1 + a_2) = d^p(b_1 + b_2)$ なので、$\partial^*([c_1 + c_2]) = [a_1 + a_2]$ を得る。よって、

$$\partial^*([c_1] + [c_2]) = \partial^*([c_1 + c_2]) = [a_1 + a_2] = [a_1] + [a_2] = \partial^*([c_1]) + \partial^*([c_2])$$

が成り立つ。同様に、$\psi^p(\lambda b_1) = \lambda c_1$ と $\varphi^{p+1}(\lambda a_1) = d^p(\lambda b_1)$ なので、

$$\partial^*(\lambda[c_1]) = \partial^*([\lambda c_1]) = [\lambda a_1] = \lambda[a_1] = \lambda\partial^*([c_1])$$

が成り立つ。これで、境界準同型は線形写像であることを示した。

例 7.11. 次のように定義されたコチェイン複体の短完全系列

$$0 \longrightarrow A^* \xrightarrow{\varphi} B^* \xrightarrow{\psi} C^* \longrightarrow 0$$

を考えてみる。ここで、$A^1 = B^0 = B^1 = C^0$ を $\mathbb{R}$ とし、それ以外の A^p、B^p、C^p をゼロ空間とし、写像 $\varphi^1\colon A^1 \to B^1$ と $d^0\colon B^0 \to B^1$、$\psi^0\colon B^0 \to C^0$ を $\mathbb{R}$ の恒道写像と定義する。

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[u] \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \mathbb{R} \arrow[u] \arrow[r] & 0 \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[u] \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[u, "\mathrm{id}"'] \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \mathbb{R} \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

このとき、$\partial^*\colon H^0(C^*) \to H^1(A^*)$ は、$\mathbb{R}$ の恒道写像となる。

補題 7.12. コチェイン複体の短完全系列

$$0 \longrightarrow A^* \xrightarrow{\varphi} B^* \xrightarrow{\psi} C^* \longrightarrow 0$$

に対して、次の系列は完全である。

$$H^p(B^*) \xrightarrow{\psi^*} H^p(C^*) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(A^*)$$

証明. まず、境界準同型の定義より、

$$\partial^*(\psi^*([b])) = [(\varphi^{p+1})^{-1}(d^p(b))] = [(\varphi^{p+1})^{-1}(0)] = [0] = 0$$

であるため、$\mathrm{im}(\psi^*) \subset \ker(\partial^*)$ を得る。次に、$[c] \in \ker(\partial^*)$ のとき、$\psi^p(b) = c$ を満たす $b \in B^p$ に対して、$d^p(b) = \varphi^{p+1}(d^p(a))$ を満たす $a \in A^p$ が存在することが分かる。さらに、

$$d^p(b - \varphi^p(a)) = d^p(b) - d^p(\varphi^p(a)) = d^p(b) - \varphi^{p+1}(d^p(a)) = d^p(b) - d^p(b) = 0$$

であるため、$b - \varphi^p(a)$ は p 次コサイクル、$\psi^*([b - \varphi^p(a)]) = [c - 0] = [c]$ が分かる。よって、$\ker(\partial^*) \subset \mathrm{im}(\psi^*)$ を得る。これで、補題を示した。 □

補題 7.13. コチェイン複体の短完全系列

$$0 \longrightarrow A^* \xrightarrow{\varphi} B^* \xrightarrow{\psi} C^* \longrightarrow 0$$

に対して、次の系列が完全である。

$$H^p(C^*) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(A^*) \xrightarrow{\varphi^*} H^{p+1}(B^*)$$

証明. まず、コサイクル $c \in C^p$ に対して、$\psi^p(b) = c$ を満たす $b \in B^p$ を選ぶと、

$$\varphi^*(\partial^*([c])) = [d^p(b)] = 0$$

が分かる。すなわち、$\mathrm{im}(\partial^*) \subset \ker(\varphi^*)$ を得る。次に、$[a] \in \ker(\varphi^*)$ のとき、$\varphi^{p+1}(a) = d^p(b)$ を満たす $b \in B^p$ が存在し、

$$d^p(\psi^p(b)) = \psi^{p+1}(d^p(b)) = \psi^{p+1}(\varphi^{p+1}(a)) = 0$$

が分かる。境界準同形の定義より、$[a] = \partial^*([\psi^p(b)])$ を得る。すなわち、$\ker(\varphi^*) \subset \mathrm{im}(\partial^*)$ が成り立つ。これで、補題を示した。 □

補題 7.8 と 7.12、 7.13 から、次の大切な定理が成り立つ。

定理 7.14. コチェイン複体の短完全系列

$$0 \longrightarrow A^* \xrightarrow{\varphi} B^* \xrightarrow{\psi} C^* \longrightarrow 0$$

に対して、次の長完全系列が成り立つ。

$$\cdots \longrightarrow H^p(A^*) \xrightarrow{\varphi^*} H^p(B^*) \xrightarrow{\psi^*} H^p(C^*) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(A^*) \xrightarrow{\varphi^*} H^{p+1}(B^*) \longrightarrow \cdots$$

定義 7.15. チェイン写像 $\varphi, \psi \colon A^* \to B^*$ において、φ から ψ へのチェインホモトピーとは、次の性質を満たす線形写像 $s^p \colon A^p \to B^{p-1}$ を合わせてものである。

$$d^{p-1}s^p + s^{p+1}d^p = \varphi^p - \psi^p$$

補題 7.16. チェイン写像 $\varphi, \psi \colon A^* \to B^*$ に対して、φ から ψ へのチェインホモトピーが存在するとき、それらの誘導された写像

$$\varphi^*, \psi^* \colon H^p(A^*) \to H^p(B^*)$$

が等しい。

証明. 任意のコサイクル $a \in A^p$ に対して、

$$(\varphi^* - \psi^*)([a]) = [\varphi^p(a) - \psi^p(a)] = [d^{p-1}s^p(a) - s^{p+1}d^p(a)] = [d^{p-1}s^p(a)] = 0$$

ため、$\varphi^* = \psi^*$ が成り立つ。 □

例 7.17. 星形開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ に対して、$A^* = A^*(U)$ を次のコチェイン複体とする。

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\eta} \Omega^0(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^{n-1}(U) \xrightarrow{d} \Omega^n(U) \longrightarrow 0$$

前章の (6.5) で定義された線形写像

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r, "\eta"] & \Omega^0(U) \arrow[r, "d"] \arrow[dl, "\epsilon"'] & \Omega^1(U) \arrow[r, "d"] \arrow[dl, "s^1"'] & \cdots \arrow[r, "d"] & \Omega^{n-1}(U) \arrow[r, "d"] & \Omega^n(U) \arrow[r] \arrow[dl, "s^n"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r, "\eta"] & \Omega^0(U) \arrow[r, "d"] & \Omega^1(U) \arrow[r, "d"] & \cdots \arrow[r, "d"] & \Omega^{n-1}(U) \arrow[r, "d"] & \Omega^n(U) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

は、(6.6) より、恒道写像からゼロ写像へのチェインホモトピーであるため、補題 7.16 より、

$$\mathrm{id} = 0 \colon H^p(A^*) \to H^p(A^*)$$

を得る。これで、$H^p(A^*)$ はゼロであることが分かる。すなわち、A^* は完全系列である。

8　1の分解

まず、位相空間の部分空間を復習する。位相空間 X の部分空間とは、X の相対位相を持つ部分集合 $A \subset X$ のものである。ここで、X の相対位相に関して開集合 $U \subset A$ は、X の開集合 $V \subset X$ と A の交わりで表される部分集合 $U = V \cap A \subset A$ である。（ただし、部分空間 $A \subset X$ とその部分集合 $U \subset A$ に対して、U が A の開集合であるとき、必ずしも U が X の開集合ではない。）$A \subset X$ は部分空間であるとき、標準単射 $i\colon A \to X$ が連続で、任意の位相空間 Y と写像 $f\colon Y \to A$ に対して、$f\colon Y \to A$ が連続であることと $i \circ f\colon Y \to X$ が連続であることは同値である。

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分空間 $A \subset \mathbb{R}^n$ をおく。連続な関数 $f\colon A \to \mathbb{R}$ の台と呼ばれるのは、$f(x) \neq 0$ を満たす $x \in A$ からなる部分集合の A に関する閉包と定義され、

$$\operatorname{supp}_A(f) = \overline{\{x \in A \mid f(x) \neq 0\}} \subset A$$

と書かれる。例として、

$$\operatorname{supp}_{(0,1)}(x) = \overline{(0,1)} = (0,1)$$
$$\operatorname{supp}_{[0,1)}(x) = \overline{(0,1)} = [0,1)$$

である。

定理 8.1. 開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ とその開被覆 $\{V_i \mid i \in I\}$ に対して、次の性質 (i)–(iii) を満たす滑らかな写像 $\phi_i\colon U \to [0,1]$（$i \in I$）が存在する。

(i) 任意の $i \in I$ に対して、$\operatorname{supp}_U(\phi_i) \subset V_i$ である。

(ii) 任意の $x \in U$ に対して、次の性質を満たす開近傍 $x \in W \subset U$ が存在する。「有限個を除いてほとんど全ての $i \in I$ に対して、$\phi_i|_W = 0$」

(iii) 任意の $x \in U$ に対して、$\sum_{i \in I} \phi_i(x) = 1$ である。

このとき、族 $\{\phi_i\colon U \to \mathbb{R} \mid i \in I\}$ が、開被覆 $\{V_i \mid i \in I\}$ に関して1の分解と呼ばれる。

注 8.2. 性質 (ii) を満たす関数の族 $\{\phi_i\colon U \to \mathbb{R} \mid i \in I\}$ は、局所的有限と呼ばれる。このとき、次の公式がうまく定義された関数 $\phi\colon U \to \mathbb{R}$ を与えられる。

$$\phi(x) = \sum_{i \in I} \phi_i(x)$$

さらに、$\phi_i\colon U \to \mathbb{R}$（$i \in I$）は滑らかな関数であるとき、$\phi\colon U \to \mathbb{R}$ も滑らかな関数となる。

定理 8.1 を示すために、3 つの補題を示す。まず、$x \in \mathbb{R}^n$ と $r > 0$ に関して、次のように定義された部分集合は、それぞれ中心 x と半径 r の開球体と閉球体と呼ばれる。

$$\mathring{D}_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < r\}$$
$$D_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| \leqslant r\}$$

補題 **8.3.** 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ と $r > 0$ に対して、$\psi^{-1}\big((0,\infty)\big) = \mathring{D}_r(x)$ を満たす滑らかな写像 $\psi\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ が存在する。

証明. 補題 6.1 の証明より、

$$\psi_0(t) = \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)}, \qquad f(t) = \begin{cases} 0 & (t \leqslant 0) \\ \exp(-1/t) & (t > 0) \end{cases}$$

で定める写像 $\psi_0\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ は滑らかなで、$\psi_0^{-1}(0) = (-\infty, 0]$ を満たす。よって、

$$\psi(y) = \psi_0\big(1 - (\|y - x\|/r)\big)$$

で定める写像 $\psi\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$ は滑らかなで、$\psi^{-1}\big((0,\infty)\big) = \mathring{D}_r(x)$ を満たすことが分かる。 □

注 8.4. 補題 8.3 に於ける写像 $\psi\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ の台は、$\mathrm{supp}_{\mathbb{R}^n}(\psi) = D_r(x)$ である。

位相空間 X と任意の部分集合 $A \subset X$ において、A の内部とは、次の性質 (i)–(ii) を満たす $U \subset X$ の和集合である。

(i) U は X の開集合である。

(ii) U は A に含まれている。

例として、閉球体 $D_r(x) \subset \mathbb{R}^n$ の内部は、開球体 $\mathring{D}_r(x)$ である。

補題 **8.5.** 任意の開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ に対して、次の性質 (i)–(ii) を満たすコンパクトの部分集合 $K_m \subset \mathbb{R}^n$（$m \geqslant 1$）が存在する。

(i) 任意の $m \geqslant 1$ に対して、$K_m \subset \mathring{K}_{m+1}$ である。

(ii) $U = \bigcup_{m \geqslant 1} K_m$ である。

証明. Heine-Borel の定理より、

$$K_m = D_{2^m}(0) \setminus \Big(\bigcup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus U} \overset{\circ}{D}_{2^{-m}}(x) \Big) \subset \mathbb{R}^n$$

は、コンパクトであることが分かる。さらに、これら部分集合が (i)–(ii) を満たすため、補題が成り立つ。 □

補題 8.6. 開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ とその開被覆 $\{V_i \mid i \in I\}$ に対して、次の性質 (i)–(iii) を満たす点 $x_j \in U$ と実数 $r_j > 0$（$j \geqslant 1$）が存在する。

(i) $U = \bigcup_{j \geqslant 1} \overset{\circ}{D}_{r_j}(x_j)$ である。

(ii) 任意の $j \geqslant 1$ に対して、$\overset{\circ}{D}_{2r_j}(x_j) \subset V_i$ を満たす $i \in I$ が存在する。

(iii) 任意の $x \in U$ に対して、次の性質を満たす開近傍 $x \in W \subset U$ が存在する。「有限個を除いてほとんど全ての $j \geqslant 1$ に対して、$\overset{\circ}{D}_{2r_j}(x_j) \cap W = \varnothing$」

証明. 補題 8.5 に於ける部分集合 $K_m \subset \mathbb{R}^n$（$m \geqslant 1$）を思い出し、$K_0 = K_{-1} = \varnothing$ とする。次のように定めれた部分集合 $B_m \subset U_m \subset \mathbb{R}^n$（$m \geqslant 1$）を考える。

$$B_m = K_m \setminus \overset{\circ}{K}_{m-1}$$
$$U_m = \overset{\circ}{K}_{m+1} \setminus K_{m-2}$$

ここで、$B_m \subset \mathbb{R}^n$ はコンパクト、$U_m \subset \mathbb{R}^n$ は開集合、$\bigcup_{m \geqslant 1} B_m = \bigcup_{m \geqslant 1} U_m = U$ である。任意の $x \in B_m$ に対して、$\overset{\circ}{D}_{2r(x)}(x) \subset U_m \cap V_i$ を満たす $i \in I$ と $r(x) > 0$ が存在する。なぜなら、U_m と V_i は、$\mathbb{R}^n$ の開集合である。このとき、$\overset{\circ}{D}_{r(x)}(x)$（$x \in B_m$）は、コンパクトの空間 B_m の開被覆となるため、次の性質 (a)–(b) を満たすような有限個の $x_{m,k} \in B_m$ と $r_{m,k} > 0$（$1 \leqslant k \leqslant d_m$ ）が存在する。

(a) 任意の $m \geqslant 1$ に対して、$B_m \subset \bigcup_{1 \leqslant k \leqslant d_m} \overset{\circ}{D}_{r_{m,k}}(x_{m,k})$ である。

(b) 任意の $m \geqslant 1$ と $1 \leqslant k \leqslant d_m$ に対して、

$$\overset{\circ}{D}_{2r_{m,k}}(x_{m,k}) \subset U_m \cap V_i$$

を満たす $i \in I$ が存在する。

今、全単射

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)\colon \{j \mid j \geqslant 1\} \xrightarrow{\sim} \{(m,k) \mid m \geq 1, 1 \leqslant k \leqslant d_m\}$$

を選び、

$$x_j = x_{\alpha_1(j),\alpha_2(j)}$$

$$r_j = r_{\alpha_1(j),\alpha_2(j)}$$

とする。以下、性質 (i)–(iii) を示す。性質 (a) より、

$$U = \bigcup_{m\geqslant 1} B_m \subset \bigcup_{m\geqslant 1} \bigcup_{1\leqslant k\leqslant d_m} \mathring{D}_{r_{m,k}}(x_{m,k}) \subset \bigcup_{m\geqslant 1} U_m = U$$

であるため、

$$U = \bigcup_{m\geqslant 1} \bigcup_{1\leqslant k\leqslant d_m} \mathring{D}_{r_{m,k}}(x_{m,k}) = \bigcup_{j\geqslant 1} \mathring{D}_{r_j}(x_j)$$

を得る。これで、性質 (i) が成り立つ。性質 (b) より、任意の $j \geqslant 1$ に対して、$\mathring{D}_{2j}(x_j) \subset V_i$ を満たす $i \in I$ が存在することが分かる。すなわち、性質 (ii) が成り立つ。最後に、$x \in U$ に対して、$x \in U_m$ を満たす $m \geqslant 1$ を選ぶと、性質 (b) より、任意の $m' \geqslant m+3$ に対して、

$$\mathring{D}_{2r_{m',k}}(x_{m',k}) \cap U_m \subset U_{m'} \cap U_m = \varnothing$$

が分かる。よって、性質 (iii) が成り立つ。これで、補題を示した。 □

定理 *8.1* の証明. まず、補題 8.6 の性質 (i)–(iii) を満たす点 $x_j \in U$ と実数 $r_j > 0$ $(j \geqslant 1)$ を採る。次に、補題 8.3 に於ける、$\psi_j^{-1}\big((0,\infty)\big) = \mathring{D}_{r_j}(x_j)$ を満たす滑らかな写像 $\psi_j\colon U \to [0,\infty)$ $(j \geqslant 1)$ を思い出し、$\psi\colon U \to [0,\infty)$ を、

$$\psi(x) = \sum_{j\geqslant 1} \psi_j(x)$$

で定義する。このとき、注 8.2 より、$\psi\colon U \to [0,\infty)$ が、うまく定義された滑らかな写像であることが分かる。さらに、補体 8.6 の (i) より、任意の $x \in U$ に対して、$\psi(x) > 0$ ため、

$$\tilde{\psi}_j(x) = \psi_j(x)/\psi(x)$$

で定める $\tilde{\psi}_j\colon U \to [0,\infty)$ もうまく定義された滑らかな写像で、任意の $x \in U$ に対して、

$$\sum_{j\geqslant 1} \tilde{\psi}_j(x) = 1$$

であることを得る。

次に、任意の $j \geqslant 1$ に対して、$\mathring{D}_{2r_j}(x_j) \subset V_{i(j)}$ を満たす $i(j) \in I$ を採り、$\phi_i\colon U \to \mathbb{R}$ を、

$$\phi_i(x) = \sum_{j \in J(i)} \tilde{\psi}_j(x)$$

で定める滑らかな写像とする。ここで、$J(i) = \{j \geqslant 1 \mid i(j) = i\}$ で、$J(i) = \varnothing$ のとき、$\phi_i = 0$ とする。以下、性質 (i)–(iii) を示す。まず、任意の $j \in J(i)$ に対して、

$$\mathrm{supp}_U(\tilde{\psi}_j) = \mathrm{supp}_U(\psi_j) = D_{r_j}(x_j) \subset \mathring{D}_{2r_j}(x_j) \subset V_i$$

ため、$\mathrm{supp}_U(\phi_i) \subset V_i$ であることが分かる。よって、性質 (i) が成り立つ。次に、任意の $x \in U$ に対して、補題 8.6 の (iii) に於けるような開近傍 $x \in W \subset U$ を採る。このとき、有限個を除いてほとんど全ての $j \geq 1$ に対して、$\psi_j|_W = 0$ であるため、有限個を除いてほとんど全ての $i \in I$ に対して、$\phi_i|_W = 0$ が分かる。すなわち、性質 (ii) が成り立つ。最後に、任意の $x \in U$ に対して、

$$\sum_{i \in I} \phi_i(x) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J(i)} \tilde{\psi}_j(x) = \sum_{j \geqslant 1} \tilde{\psi}_j(x) = 1$$

ため、性質 (iii) を得る。これで、定理を示した。 □

注 8.7. 定理 8.1 の証明で定義した写像 ϕ_i について、可算個除いてほとんど全ての $i \in I$ に対して、$\phi_i = 0$ である。

定理 8.1 を使い、補題 6.1 の高次元一般化を証明する。

系 **8.8.** $A \subset U$ を満たす閉集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ と開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ に対して、次の性質 (i)–(ii) を満たす滑らかな写像 $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が存在する。

(i) 任意の $x \in A$ に対して、$\psi(x) = 1$ である。

(ii) $\mathrm{supp}_{\mathbb{R}^n}(\psi) \subset U$ である。

証明. 開集合 $V_1 = U$ と $V_2 = \mathbb{R}^n \setminus A$ は、$\mathbb{R}^n$ の開被覆を定める。定理 8.1 に於けるような滑らかな写像 $\phi_i\colon \mathbb{R}^n \to R$（$i = 1, 2$）を採ると、$\psi = \phi_1\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が性質 (i)–(ii) を満たす。 □

9　マイヤー・ビートリス系列

二つのベクトル空間 V と W において、それらの直和とは、順序対のなすベクトル空間

$$V \oplus W = \{(v,w) \mid v \in V, w \in W\}$$

である。直和のベクトル和とスカラー積は、次のように定義される。

$$(v,w)+(v',w') = (v+v', w+w')$$
$$\lambda(v,w) = (\lambda v, \lambda w)$$

基底 $S = \{v_i | i \in I\} \subset V$ と $T = \{w_j | j \in J\} \subset W$ が与えられているとき、

$$S \sqcup T = \{(v_i, 0) | i \in I\} \cup \{(0, w_j) \mid j \in J\} \subset V \oplus W$$

は、基底となる。特に、V と W は有限次元のとき、$V \oplus W$ も有限次元で、

$$\dim(V \oplus W) = \dim(V) + \dim(W)$$

である。 1 の分解（定理 8.1）を用い、次の定理を証明する。

定理 9.1. 開集合 $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ と単射 $i_v \colon U_v \to U_1 \cup U_2$、$j_v \colon U_1 \cap U_2 \to U_v$（$v = 1,2$）に対して、次のようなコチェイン復体の短完全系列が成り立つ。

$$0 \longrightarrow \Omega^p(U_1 \cup U_2) \xrightarrow{(i_1^*, i_2^*)} \Omega^p(U_1) \oplus \Omega^p(U_2) \xrightarrow{j_1^* - j_2^*} \Omega^p(U_1 \cap U_2) \longrightarrow 0$$

ここで、(i_1^*, i_2^*) と $j_1^* - j_2^*$ とは、次のように定める線形写像である。

$$(i_1^*, i_2^*)(\omega) = (i_1^*(\omega), i_2^*(\omega)), \qquad (j_1^* - j_2^*)(\omega_1, \omega_2) = j_1^*(\omega_1) - j_2^*(\omega_2)$$

証明. $U_v \subset \mathbb{R}^n$ が開集合であるため、$U = U_1 \cup U_2 \subset \mathbb{R}^n$ と $U_1 \cap U_2 \subset \mathbb{R}^n$ も開集合である。

まず、(i_1^*, i_2^*) は単射であることを示す。任意の $\omega \in \Omega^p(U_1 \cup U_2)$ は、一意的に $\omega = \sum_I f_I \wedge dx_I$ で表される。さらに、例 5.6 と定理 5.7 より、

$$i_v^*(\omega) = \sum_I (f_I \circ i_v) \wedge dx_I \qquad (v = 1,2)$$

ため、$(i_1^*, i_2^*)(\omega) = 0$ のとき、任意の I に対して、$f_I \circ i_1 = 0$ と $f_I \circ i_2 = 0$ を得る。従って、$f_I = 0$ で、$\omega = 0$ が分かる。これで、(i_1^*, i_2^*) は単射であることを示した。

次に、$\mathrm{im}(i_1^*, i_2^*) = \ker(j_1^* - j_2^*)$ を示す。まず、$i_1 \circ j_1 = i_2 \circ j_2$ なので、

$$\begin{aligned}((j_1^* - j_2^*) \circ (i_1^*, i_2^*))(\omega) &= (j_1^* - j_2^*)(i_1^*(\omega), i_2^*(\omega)) = j_1^* i_1^*(\omega) - j_2^* i_2^*(\omega) \\ &= (i_1 \circ j_1)^*(\omega) - (i_2 \circ j_2)^*(\omega) = 0\end{aligned}$$

を得る。すなわち、$\mathrm{im}(i_1^*, i_2^*) \subset \ker(j_1^* - j_2^*)$ である。また、$(j_1^* - j_2^*)(\omega_1, \omega_2) = 0$ を満たす $\omega_v \in \Omega^p(U_v)$ が与えられているとき、$(\omega_1, \omega_2) = (i_1^*, i_2^*)(\omega)$ を満たす $\omega \in \Omega^p(U_1 \cup U_2)$ を、次のように定義する。まず、$\omega_v \in \Omega^p(U_v)$ は、一意的に次のように表される。

$$\omega_1 = \sum_I f_I \wedge dx_I, \qquad \omega_2 = \sum_I g_I \wedge dx_I$$

さらに、$j_1^*(\omega_1) = j_2^*(\omega_2)$ より、$f_I \circ j_1 = g_I \circ j_2 \colon U_1 \cap U_2 \to \mathbb{R}$ ため、

$$h_I(x) = \begin{cases} f_I(x) & (x \in U_1) \\ g_I(x) & (x \in U_2) \end{cases}$$

で定める関数 $h_I \colon U \to \mathbb{R}$ は、うまく定義された滑らかな写像であることが分かる。よって、

$$\omega = \sum_I h_I \wedge dx_I$$

で定める $\omega \in \Omega^p(U)$ は、$(i_1^*, i_2^*)(\omega) = (\omega_1, \omega_2)$ を満たす。すなわち、$\mathrm{im}(i_1^*, i_2^*) \supset \ker(j_1^* - j_2^*)$ である。これで、$\mathrm{im}(i_1^*, i_2^*) = \ker(j_1^* - j_2^*)$ を示した。

最後に、$j_1^* - j_2^*$ は全射であることを示す。$\{U_1, U_2\}$ は、U の開被覆であるため、1 の分解より、次の性質 (i)–(ii) を満たす滑らかな関数 $\phi_v \colon U \to \mathbb{R}$（$v = 1, 2$）が存在することが分かる。

(i) $\mathrm{supp}_U(\phi_v) \subset U_v$（$v = 1, 2$）

(ii) 任意の $x \in U$ に対して、$\phi_1(x) + \phi_2(x) = 1$

よって、$\omega \in \Omega^p(U_1 \cap U_2)$ が与えられたとき、$\omega_v \in \Omega^p(U_v)$（$v = 1, 2$）を、

$$\omega_1(x) = \begin{cases} \phi_2(x)\omega(x) & (x \in U_1 \cap U_2) \\ 0 & (x \in U_1 \setminus \mathrm{supp}_U(\phi_2)) \end{cases}$$

$$\omega_2(x) = \begin{cases} -\phi_1(x)\omega(x) & (x \in U_1 \cap U_2) \\ 0 & (x \in U_2 \setminus \mathrm{supp}_U(\phi_1)) \end{cases}$$

で定めると、$(j_1^*-j_2^*)(\omega_1,\omega_2)=\omega$ である。なぜなら、任意の $x\in U_1\cap U_2$ に対して、

$$(j_1^*-j_2^*)(\omega_1,\omega_2)(x)=\omega_1(x)-\omega_2(x)=\phi_2(x)\omega(x)-(-\phi_1(x)\omega(x))=\omega(x)$$

である。すなわち、$j_1^*-j_2^*$ は全射であることを示した。これで、定理が成り立つ。 □

コチェイン複体 A^* と B^* において、それらの直和 $A^*\oplus B^*$ とは、次のように定義されたコチェイン複体である。

$$\cdots\longrightarrow A^{p-1}\oplus B^{p-1}\xrightarrow{d\oplus d}A^p\oplus B^p\xrightarrow{d\oplus d}A^{p+1}\oplus B^{p+1}\xrightarrow{d\oplus d}A^{p+2}\oplus B^{p+2}\longrightarrow\cdots$$

ここで、$d\oplus d$ は、$(d\oplus d)(a,b)=(da,db)$ で定める微分ある。

補題 9.2. コチェイン複体 A^* と B^* に対して、$([a],[b])$ を $[(a,b)]$ に移す線形写像

$$H^p(A^*)\oplus H^p(B^*)\to H^p(A^*\oplus B^*)$$

は、同型である。

証明. コホモロジー類 $([a],[b])$ をコホモロジー類 $[(a,b)]$ に移す写像は、うまく定義された線形写像で、逆写像は、コホモロジー類 $[(a,b)]$ をコモロジー類 $([a],[b])$ に移す写像である。 □

定理 9.3 (マヤー・ビートリス系列)**.** 開集合 $U_1,U_2\subset\mathbb{R}^n$ と単射 $i_v\colon U_v\to U=U_1\cup U_2$、$j_v\colon U_1\cap U_2\to U_v$（$v=1,2$）に対して、次の長完全系列が成り立つ。

$$\cdots\longrightarrow H^p(U)\xrightarrow{(i_1^*,i_2^*)}H^p(U_1)\oplus H^p(U_2)\xrightarrow{j_1^*-j_2^*}H^p(U_1\cap U_2)\xrightarrow{\partial^*}H^{p+1}(U)\longrightarrow\cdots$$

ここで、(i_1^*,i_2^*) と $j_1^*-j_2^*$ は、

$$(i_1^*,i_2^*)([\omega])=(i_1^*([\omega]),i_2^*([\omega])),\qquad(j_1^*-j_2^*)([\omega_1],[\omega_2])=j_1^*([\omega_1])-j_2^*([\omega_2])$$

で定める線形写像である。

証明. 定理 9.1 と定理 7.14、補題 9.2 から成り立つ。 □

系 9.4. 互いに素な開集合 $U_1,U_2\subset\mathbb{R}^n$ に対して、線形写像

$$(i_1^*,i_2^*)\colon H^p(U_1\cup U_2)\to H^p(U_1)\oplus H^p(U_2)$$

は、同型である。

証明. ド・ラームコホモロジー群の定義より、任意の $p \geqslant 0$ に対して、

$$H^p(U_1 \cap U_2) = H^p(\emptyset) = 0$$

ため、マヤー・ビートリス系列より、

$$H^p(U_1 \cup U_2) \xrightarrow{(i_1^*, i_2^*)} H^p(U_1) \oplus H^p(U_2)$$

は同型であることが分かる。 □

例 9.5. 開集合 $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ のド・ラームコホモロジー群を計算する。U を、開集合

$$U_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leqslant 0\} \subset U$$
$$U_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geqslant 0\} \subset U$$

の和集合で表し、マヤー・ビートリス系列

$$\cdots \longrightarrow H^p(U) \xrightarrow{(i_1^*, i_2^*)} H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) \xrightarrow{j_1^* - j_2^*} H^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(U) \longrightarrow \cdots$$

を考えてみる。ここで、$U_1 \cap U_2$ は、次の開集合 V_1 と V_2 の和集合で表される。

$$V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$
$$V_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\}$$

また、$V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ため、系 9.4 より、

$$H^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{(k_1^*, k_2^*)} H^p(V_1) \oplus H^p(V_2)$$

は同形であることが分かる。ただし、$k_v \colon V_v \to U_1 \cap U_2$（$v = 1, 2$）は、標準単射である。さらに、$U_v, V_v$（$v = 1, 2$）は、星形開集合であるため、ポアンカレの補題（定理 6.4）より、

$$H^p(U_v) = \begin{cases} \mathbb{R} \cdot 1_{U_v} & (p = 0) \\ 0 & (p \neq 0) \end{cases}$$

$$H^p(U_1 \cap U_2) = \begin{cases} \mathbb{R} \cdot 1_{V_1} \oplus \mathbb{R} \cdot 1_{V_2} & (p = 0) \\ 0 & (p \neq 0) \end{cases}$$

が分かる。ここで、$1_{U_v} \colon U_v \to \mathbb{R}$ と $1_{V_v} \colon U_1 \cap U_2 \to \mathbb{R}$（$v = 1, 2$）は、それぞれ U_v, V_v の指示関数である。また、$j_v^*(1_{U_v}) = 1_{U_1 \cap U_2} = 1_{V_1} + 1_{V_2}$ ため、

$$(j_1^* - j_2^*)(a \cdot 1_{U_1}, b \cdot 1_{U_2}) = (a - b) \cdot (1_{V_1} + 1_{V_2})$$

を得る。よって、マヤー・ビートリス系列から、

$$H^p(U) = \begin{cases} \mathbb{R}\cdot 1_U & (p=0) \\ \mathbb{R}\cdot \partial^*(1_{V_1}) & (p=1) \\ 0 & (p\neq 0,1) \end{cases}$$

であることが成り立つ。

以下、コホモロジー類 $\partial^*(1_{V_1})$ に関して、次の公式を示す。

$$\partial^*(1_{V_1}) = \frac{1}{2\pi}\cdot\Big[-\frac{y}{x^2+y^2}\wedge dx + \frac{x}{x^2+y^2}\wedge dy\Big] \tag{9.6}$$

次の図式を考える。

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Omega^1(U) \arrow[r, "(i_1^*, i_2^*)"] & \Omega^1(U_1)\oplus\Omega^1(U_2) \arrow[r, "j_1^*-j_2^*"] & \Omega^1(U_1\cap U_2) \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \Omega^0(U) \arrow[r, "(i_1^*, i_2^*)"] \arrow[u, "d"] & \Omega^0(U_1)\oplus\Omega^0(U_2) \arrow[r, "j_1^*-j_2^*"] \arrow[u, "d\oplus d"] & \Omega^0(U_1\cap U_2) \arrow[r] \arrow[u, "d"] & 0 \end{tikzcd}$$

逆関数の定理より、次の写像は微分同相であることが分かる。

$$F_1\colon (0,\infty)\times(-\pi,\pi)\to U_1, \qquad F_1(r,\theta_1) = (r\cos\theta_1, r\sin\theta_1)$$
$$F_2\colon (0,\infty)\times(0,2\pi)\to U_2, \qquad F_2(r,\theta_2) = (r\cos\theta_2, r\sin\theta_2)$$

具体的に、F_v（$v=1,2$）は、開集合の微分可能全単射で、ヤコビ行列 $\partial(x,y)/\partial(r,\theta_v)$ は可逆行列である。さらに、

$$\frac{\partial(r,\theta_v)}{\partial(x,y)} = \Big(\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta_v)}\Big)^{-1} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta_v & r\sin\theta_v \\ -\sin\theta_v & \cos\theta_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

ため、

$$\begin{aligned} (d\oplus d)(\theta_1,\theta_2) &= \Big(-\frac{y}{x^2+y^2}\wedge dx + \frac{x}{x^2+y^2}\wedge dy, -\frac{y}{x^2+y^2}\wedge dx + \frac{x}{x^2+y^2}\wedge dy\Big) \\ &= (i_1^*, i_2^*)\Big(-\frac{y}{x^2+y^2}\wedge dx + \frac{x}{x^2+y^2}\wedge dy\Big) \end{aligned}$$

を得る。一方、関数 $\theta_v\colon U_v\to\mathbb{R}$ の定義より、

$$(j_1^*-j_2^*)(\theta_1,\theta_2) = -2\pi\cdot 1_{V_2}$$

である。なぜなら、任意の $(x,y)\in V_1$ 対して、$\theta_1(x,y)=\theta_2(x,y)$ で、任意の $(x,y)\in V_2$ に対して、$\theta_1(x,y)=\theta_2(x,y)-2\pi$ である。よって、境界準同型の定義（定義 7.9）より、

$$\partial^*(-2\pi\cdot 1_{V_2})=\left[-\frac{y}{x^2+y^2}\wedge dx+\frac{x}{x^2+y^2}\wedge dy\right]$$

を得る。最後に、

$$\begin{aligned}2\pi\cdot\partial^*(1_{V_1})&=\partial^*(-2\pi\cdot 1_{V_2})+\partial^*(2\pi\cdot 1_{V_1}+2\pi\cdot 1_{V_2})\\&=\left[-\frac{y}{x^2+y^2}\wedge dx+\frac{x}{x^2+y^2}\wedge dy\right]+0\end{aligned}$$

であるため、(9.6) が成り立つ。

定理 9.7. 有限個の凸開集合 $U_1,\ldots,U_r\subset\mathbb{R}^n$ に関して、任意の $p\geqslant 0$ に対して、

$$\dim_{\mathbb{R}} H^p(U_1\cup\cdots\cup U_r)<\infty$$

である。

証明. 帰納法を用い示す。$r=1$ のとき、定理がポアンカレの補題（定理 6.4）からよるため、$r=k-1$ のときが正しいを仮定し、$r=k$ のときを示せば良い。マイヤー・ビートリス系列より、次の完全系列が成り立つ。

$$H^{p-1}((U_1\cup\cdots\cup U_{k-1})\cap U_k)\xrightarrow{\partial^*}H^p(U_1\cup\cdots\cup U_k)\xrightarrow{(i_1^*,i_2^*)}H^p(U_1\cup\cdots\cup U_{k-1})\oplus H^p(U_k)$$

ここで、帰納法の仮定より、最右辺と最左辺は有限次元ベクトル空間である。なぜなら、

$$(U_1\cup\cdots\cup U_{k-1})\cap U_k=(U_1\cap U_k)\cup\cdots\cup(U_{k-1}\cap U_k)$$

も、$k-1$ 個の凸開集合の和集合で表される。よって、次の短完全系列で、最左辺と最右辺も、有限次元ベクトル空間であることが分かる。

$$0\longrightarrow \mathrm{im}(\partial^*)\longrightarrow H^p(U_1\cup\cdots\cup U_k)\longrightarrow \mathrm{im}((i_1^*,i_2^*))\longrightarrow 0$$

よって、補題 7.1 より、$H^p(U_1\cup\cdots\cup U_k)$ の有限次元性が成り立つ。 □

注 9.8. 一般的に、開集合 $U\subset\mathbb{R}^n$ とその開被覆 $\{U_i\mid i\in I\}$ が与えられたとき、次のようなスペクタラル系列が成り立つ。スペクトラル系列とは、長完全系列の一般化である。

$$E_1^{p,q}=\bigoplus_{i_1<\cdots<i_p}H^q(U_{i_1}\cap\cdots\cap U_{i_p})\Rightarrow H^{p+q}(U)$$

10　ホモトピー不変性

以下、ド・ラームコホモロジー群 $H^p(-)$ は、ユークリッド空間の開集合とその連続写像のホモトピー類のなす圏から実ベクトル空間とその線形写像のなす圏への反変関手となることを示す。それを用い、$U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ のコホモロジー群を計算する。

定義 10.1. 位相空間 X と Y、連続写像 $f, g\colon X \to Y$ において、f から g へのホモトピーとは、次の性質を満たす連続写像 $F\colon X \times [0,1] \to Y$ のものである。「任意の $x \in X$ に対して、$F(x,0) = f(x)$ かつ $F(x,1) = g(x)$」

f から g へのホモトピーが存在するとき、f と g がホモトピックと呼ばれ、$f \simeq g$ と書かれる。

補題 10.2. 任意の連続写像 $f, g, h\colon X \to Y$ に対して、次の性質が成り立つ。

(i) $f \simeq f$

(ii) $f \simeq g$ ならば $g \simeq f$

(iii) $f \simeq g$ かつ $g \simeq h$ ならば $f \simeq h$

すなわち、ホモトピーは同値関係である。

証明. (i) $F(x,t) = f(x)$ で定める写像 $F\colon X \times [0,1] \to Y$ は、f から自分自身へのホモトピーである。

(ii) $F\colon X \times [0,1] \to Y$ は、f から g へのホモトピーであるとき、$G(x,t) = F(x, 1-t)$ で定める写像 $G\colon X \times [0,1] \to Y$ が、g から f へのホモトピーである。

(iii) $F, G\colon X \times [0,1] \to Y$ は、それぞれ f から g へのホモトピーと g から h へのホモトピーであるとき、

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x, 2t) & (0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}) \\ G(x, 2t-1) & (\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1) \end{cases}$$

で定める写像 $H\colon X \times [0,1] \to Y$ が、f から h へのホモトピーとなる。 □

補題 10.3. 任意の $f_0 \simeq f_1\colon X \to Y$ と $g_0 \simeq g_1\colon Y \to Z$ を満たす連続写像に対して、

$$g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1\colon X \to Z$$

である。

証明. $F\colon X\times[0,1]\to Y$ と $G\colon Y\times[0,1]$ は、それぞれ f_0 から f_1 へのホモトピーと g_0 から g_1 へのホモトピーであるとき、$H(x,t)=G(F(x,t),t)$ で定める写像 $H\colon X\times[0,1]\to Z$ が $g_0\circ f_0$ から $g_1\circ f_1$ へのホモトピーとなる。 □

定義 10.4. 連続写像 $f\colon X\to Y$ は、ホモトピー同値であることとは、

$$g\circ f\simeq \mathrm{id}_X$$
$$f\circ g\simeq \mathrm{id}_Y$$

を満たす連続写像 $g\colon Y\to X$ が存在することである。これら性質をみたすような写像 g は、f のホモトピー逆写像と呼ばれる。

ホモトピー同値 $f\colon X\to Y$ が存在するとき、位相空間 X と Y がホモトピー同値であると呼ばれる。特に、空間 1 点とホモトピー同値である位相空間は、可縮な空間と呼ばれる。

注 10.5. 補題 10.2 より、位相空間 X から位相空間 Y への連続写像のホモトピー類のなす集合は、うまく定義された集合であることが分かる。この集合は、$[X,Y]$ と書かれ、連続写像 f を含むホモトピー類は、$[f]$ と書かれる。さらに、補題 10.3 より、三つの位相空間 X と Y、Z に対して、次のように定める写像は、うまく定義された写像であることが分かる。

$$[Y,Z]\times[X,Y]\xrightarrow{\circ}[X,Z]\qquad ([g],[f])\longmapsto[g\circ f]$$

このように、位相空間と連続写像のホモトピー類を合わせてホモトピー圏が成り立つ。さらに、連続写像 $f\colon X\to Y$ に対して、次の性質 (i)–(ii) は、同値である。

(i) f は、ホモトピー同値である。

(ii) $[f]$ は、ホモトピー圏の同形である。

例 10.6. 任意の位相空間 X と部分空間 $Y\subset\mathbb{R}^n$、連続写像 $f,g\colon X\to Y$ に関して、任意の $x\in X$ に対して、Y が $f(x)$ から $g(x)$ への線分を含むとき、

$$F(x,t)=(1-t)f(x)+tg(x)$$

で定める写像 $F\colon X\times[0,1]\to Y$ は、f から g のホモトピーとなる。

例として、星形である部分空間 $Y\subset\mathbb{R}^n$ は可縮であることを示す。Y は、$\bar{y}$ に関して星形であるとき、標準単射 $f\colon\{\bar{y}\}\to Y$ と定置写像 $g\colon Y\to\{\bar{y}\}$ を考えてみる。このとき、以上のホモトピーを用い、$f\circ g\simeq\mathrm{id}_Y$ が分かる。さらに、$g\circ f=\mathrm{id}_{\{\bar{y}\}}$ ため、f はホモトピー同値、位相空間 Y は可縮であることを得る。

空集合でない部分集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ において、S からの距離とは、

$$d(x, S) = \inf\{\|x - s\| \mid s \in S\}$$

で定める写像 $d(-, S)\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ のものである。

補題 10.7. $S \subset \mathbb{R}^n$ を、空集合でない部分集合とする。任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$|d(x, S) - d(y, S)| \leqslant \|x - y\|$$

である。特に、$d(-, S)\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ は、連続写像である。

証明. 三角不等式より、任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ と $s \in S$ に対して、

$$\|x - s\| = \|x - y + y - s\| \leqslant \|x - y\| + \|y - s\|$$

が分かる。よって、任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$、$s \in S$ に対して、

$$d(x, S) \leqslant \|x - y\| + \|y - s\|$$

ため、任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$d(x, S) \leqslant \|x - y\| + d(y, S)$$

が分かる。同様に、任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$d(y, S) \leqslant \|y - x\| + d(x, S) = \|x - y\| + d(x, S)$$

を得るため、補題が成り立つ。 $\square$

補題 10.8. $U \subset \mathbb{R}^m$ と $V \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とし、$A \subset U_0 \subset U$ をそれぞれ U の閉集合と U の開集合とし、$\epsilon\colon U \to (0, \infty)$ を連続写像とする。このとき、任意の U_0 上滑らかなである連続写像 $f\colon U \to V$ に対して、次の性質 (i)–(ii) を満たす滑らかな写像 $\phi\colon U \to V$ が存在する。

(i) 任意の $x \in U$ に対して、$\|\phi(x) - f(x)\| < \epsilon(x)$

(ii) 任意の $x \in A$ に対して、$\phi(x) = f(x)$

証明. まず、$V=\mathbb{R}^n$ のときを考える。このとき、任意の $p\in U\setminus A$ に対して、次の性質を満たす開近傍 $p\in U_p\subset U\setminus A$ が存在する。「任意の $x\in U_p$ に対して、$\|f(x)-f(p)\|<\epsilon(x)$ である」なぜなら、$g(x)=\epsilon(x)-\|f(x)-f(p)\|$ で定める写像 $g\colon U\setminus A\to\mathbb{R}$ は連続で、$p\in g^{-1}((0,\infty))\subset U\setminus A$ は開近傍である。今、$\{U_0,U_p\mid p\in U\setminus A\}$ は、U の開被覆であるため、1 の分解より、定理 8.1 の (i)–(iii) を満たす滑らかな写像 $\phi_0,\phi_p\colon U\to[0,1]$ ($p\in U\setminus A$) が選べる。これらを用い、次のように定める滑らかな写像 $\phi\colon U\to\mathbb{R}^n$ が成り立つ。

$$\phi(x)=\phi_0(x)f(x)+\sum_{p\in U\setminus A}\phi_p(x)f(p)$$

また、定理 8.1 の性質 (iii) より、

$$f(x)=\phi_0(x)f(x)+\sum_{p\in U\setminus A}\phi_p(x)f(x)$$

であるため、

$$\phi(x)-f(x)=\sum_{p\in U\setminus A}\phi_p(x)(f(p)-f(x))$$

が分かる。ここで、$\mathrm{supp}_U(\phi_p)\subset U\setminus A$ ため、任意の $x\in A$ に対して、$\phi(x)=f(x)$ を得る。同様に、$\mathrm{supp}_U(\phi_p)\subset U_p$ なので、任意の $x\in U$ に対して、

$$\|\phi(x)-f(x)\|\leqslant\sum_{p\in U\setminus A}\phi_p(x)\|f(p)-f(x)\|<\sum_{p\in U\setminus A}\phi_p(x)\epsilon(x)\leqslant\epsilon(x)$$

が分かる。これで、$V=\mathbb{R}^n$ のとき、補題が成り立つ。

最後に、$V\subset\mathbb{R}^n$ は、一般的な開集合であるとき、与えられた写像 $\epsilon\colon U\to(0,\infty)$ の代わりに、次のように定める写像 $\epsilon'\colon U\to(0,\infty)$ を考える。

$$\epsilon'(x)=\min\{\epsilon(x),d(f(x),\mathbb{R}^n\setminus V)\}$$

ここで、$V\subset\mathbb{R}^n$ は開集合、$f(x)\in V$ であるため、$d(f(x),\mathbb{R}^n\setminus V)>0$ を得る。よって、$\epsilon'\colon U\to(0,\infty)$ は、うまく定義された写像であり、補題 10.7 より、連続であることが分かる。今、$\phi\colon U\to\mathbb{R}^n$ を、ϵ' に関する性質 (i)–(ii) を満たす滑らかなとすると、必ず $\phi(U)\subset V$ である。これで、補題を示した。 □

命題 **10.9.** $U\subset\mathbb{R}^m$ と $V\subset\mathbb{R}^n$ を、開集合とする。

(i) 任意の連続写像 $f\colon U\to V$ に対して、f とホモトピックである滑らかな写像 $\phi\colon U\to V$ が存在する。

(ii) 任意の滑らかな写像 $\phi_0, \phi_1 \colon U \to V$ に対して、ϕ_0 と ϕ_1 がホモトピックならば、次の性質を満たす滑らかな写像 $\Phi \colon U \times \mathbb{R} \to V$ が存在する。「任意の $x \in U$ に対して、$\Phi(x, 0) = \phi_0(x)$ かつ $\Phi(x, 1) = \phi_1(x)$」

証明. (i) 補題 10.8 より、$\epsilon \colon U \to (0, \infty)$ を、$\epsilon(x) = d(f(x), \mathbb{R}^n \setminus V)$ で定める連続写像とすると、任意の $x \in U$ に対して、$\|\phi(x) - f(x)\| < \epsilon(x)$ を満たす滑らかな写像 $\phi \colon U \to V$ が存在する。$\epsilon(x)$ の定義より、このような写像 $\phi \colon U \to V$ は、任意の $x \in U$ に対して、

$$\phi(x) \in D_{\epsilon(x)}(f(x)) \subset V$$

を満たすことが分かるため、例 10.6 より、ϕ と f はホモトピックである。

(ii) 補題 6.1 を用い、次の性質を満たす滑らかな関数 $\psi \colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ を選ぶ。

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & (t \leqslant 1/3) \\ 1 & (t \geqslant 2/3) \end{cases}$$

今、ϕ_0 から ϕ_1 へのホモトピー $F \colon U \times [0, 1] \to V$ が与えられたとき、

$$G(x, t) = F(x, \psi(t))$$

で定める連続写像を考えてみる。与えられた $\phi_0, \phi_1 \colon U \to \mathbb{R}$ は、滑らかな写像であるため、開集合 $U \times (-\infty, \frac{1}{3}) \cup U \times (\frac{2}{3}, \infty) \subset U \times \mathbb{R}$ 上、$G \colon U \times \mathbb{R} \to V$ も滑らかな写像であることが分かる。さらに、$U \times \{0, 1\} \subset U \times \mathbb{R}$ は、閉集合であるため、補題 10.8 より、任意の $(x, t) \in U \times \{0, 1\}$ に対して、$\Phi(x, t) = G(x, t)$ を満たす滑らかな写像 $\Phi \colon U \times \mathbb{R} \to V$ が存在することを得る。これで、命題を示した。 □

注 10.10. 命題 10.9 に於けるような滑らかな写像 $\Phi \colon U \times \mathbb{R} \to V$ は、ϕ_0 から ϕ_1 への滑らかなホモトピーとも呼ばれる。

11 ホモトピー不変性（続き）

定義 7.15 から、チェインホモトピーの定義を想起する。

命題 11.1. $U \subset \mathbb{R}^m$ と $V \subset \mathbb{R}^n$ を開集合、$\phi_0, \phi_1 \colon U \to V$ を滑らかな写像とする。このとき、ϕ_0 から ϕ_1 への滑らかなホモトピー $\Phi \colon U \times \mathbb{R} \to V$ は、$\phi_0^* \colon \Omega^*(V) \to \Omega^*(U)$ から $\phi_1^* \colon \Omega^*(V) \to \Omega^*(U)$ へのチェインホモトピーを誘導する。

証明. ポアンカレの補題（定理 6.4）の証明で定義された線形写像

$$\hat{s}^p \colon \Omega^p(U \times \mathbb{R}) \to \Omega^{p-1}(U) \qquad (p \in \mathbb{Z})$$

を思い出す。ここで、任意の開集合 $W \subset \mathbb{R}^k$、$p < 0$ に対して、$\Omega^p(W) = 0$ とする。さらに、$\iota_v \colon U \to U \times \mathbb{R}$ を、$\iota_v(x) = (x, v)$ で定める滑らかな写像とすると、(6.7) より、

$$d\hat{s}^p + \hat{s}^{p+1}d = \iota_1^* - \iota_0^* \qquad (p \in \mathbb{Z})$$

が分かる。よって、

$$s^p = \hat{s}^p \circ \Phi^* \colon \Omega^p(V) \to \Omega^{p-1}(U) \qquad (p \in \mathbb{Z})$$

とすると、任意の整数 p に対して、

$$\begin{aligned} ds^p + s^{p+1}d &= d\hat{s}^p\Phi^* + \hat{s}^{p+1}\Phi^*d = d\hat{s}^p\Phi^* + \hat{s}^{p+1}d\Phi^* = (d\hat{s}^p + \hat{s}^{p+1}d)\Phi^* \\ &= (\iota_1^* - \iota_0^*)\Phi^* = (\Phi\iota_1)^* - (\Phi\iota_0)^* = \phi_1^* - \phi_0^* \end{aligned}$$

を得る。これで、命題を示した。 □

開集合 $U \subset \mathbb{R}^m$ と $V \subset \mathbb{R}^n$、連続写像 $f \colon U \to V$ を考えてみる。命題 10.9 より、f とホモトピックである滑らかな写像 $\phi \colon U \to V$ が存在する。誘導された線形写像

$$\phi^* \colon H^*(V) \to H^*(U)$$

は、ϕ によらず、f で決定されたものである。以下、$\phi_0, \phi_1 \colon U \to V$ は、f とホモトピックである滑らかな写像であとき、$\phi_0^* = \phi_1^* \colon H^*(V) \to H^*(U)$ を示す。ϕ_0 と ϕ_1 は、ホモトピックであるため、命題 10.9 より、ϕ_0 から ϕ_1 の滑らかなホモトピーが存在することが分かる。このとき、命題 11.1 より、$\phi_0^* \colon \Omega^*(V) \to \Omega^*(U)$ から $\phi_1^* \colon \Omega^*(V) \to \Omega^*(U)$ へのチェインホモトピーを得るため、補題 7.16 より、$\phi_0^* = \phi_1^* \colon H^*(\Omega^*(V)) \to H^*(\Omega^*(U))$ が成り立つ。これで、次のように定める線形写像 f^* は、うまく定義された写像であることを示した。

定義 11.2. 開集合 $U \subset \mathbb{R}^m$ と $V \subset \mathbb{R}^n$ において、連続写像 $f\colon U \to V$ で誘導された線形写像

$$f^*\colon H^p(V) \to H^p(U)$$

とは、任意の f とホモトピックである滑らかな写像 $\phi\colon U \to V$ で誘導された線形写像 ϕ^* のものである。

注 11.3. 連続写像 $f\colon U \to V$ の場合には、$\Omega^p(V)$ から $\Omega^p(U)$ への f で誘導された写像は定義されていない。

定理 11.4. 連続写像で誘導された線形写像について、次の性質 (i)–(ii) が成り立つ。

(i) 任意のホモトピックである連続写像 $f_0, f_1\colon U \to V$ に対して、

$$f_0^* = f_1^*\colon H^p(V) \to H^p(U)$$

である。

(ii) 任意の連続写像 $f\colon U \to V$ と $g\colon V \to W$ に対して、

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*\colon H^p(W) \to H^p(U)$$

である。

ここで、$U \subset \mathbb{R}^k$ と $V \subset \mathbb{R}^m$、$W \subset \mathbb{R}^n$ は、開集合である。

証明. (i) 補題 10.2 より、滑らかな写像 $\phi\colon U \to V$ に対して、$\phi \simeq f_0$ であることと $\phi \simeq f_1$ であることは同値であるため、定義 11.2 より、$f_0^* = \phi^* = f_1^*$ が分かる。

(ii) 補題 10.3 より、滑らかな写像 $\phi\colon U \to V$ と $\psi\colon U \to V$ に対して、$\phi \simeq f$ と $\psi \simeq g$ なら、$\psi \circ \phi \simeq g \circ f$ ため、

$$(g \circ f)^* = (\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^* = f^* \circ g^*$$

を得る。 □

注 11.5. 定理 11.4 と定理 5.11 は、ド・ラームコホモロジーは、次のような反変関手であることを示す。

$$\left\{ \begin{matrix} \text{ユークリッド空間の開集合} \\ \text{連続写像のホモトピー類} \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\qquad H^*(-) \qquad} \left\{ \begin{matrix} \mathbb{R} \text{ 上次数つき反可換代数} \\ \text{その準同型} \end{matrix} \right\}$$

ただし、連続写像 $f\colon U \to V$ を含むホモトピー類 $[f]$ は、誘導された写像

$$[f]^* = f^*\colon H^p(V) \to H^p(U)$$

に移される。

系 **11.6.** 開集合 $U \subset \mathbb{R}^m$ と $V \subset \mathbb{R}^n$、連続写像 $f\colon U \to V$ に対して、f はホモトピー同値なら、$f^*\colon H^p(V) \to H^p(U)$ は同型である。特に、f は同相であるとき、f^* は同型である。

証明. 反変関手である性質より、

$$f^* \circ g^* = (g \circ f)^* = \mathrm{id}_U^* = \mathrm{id}_{H^p(U)}$$
$$g^* \circ f^* = (f \circ g)^* = \mathrm{id}_V^* = \mathrm{id}_{H^p(V)}$$

が成り立つ。ただし、g は f のホモトピー逆写像である。 □

系 **11.7.** 任意の可縮な開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ に対して、

$$H^p(U) = \begin{cases} \mathbb{R} \cdot 1_U & (p = 0) \\ 0 & (p \neq 0) \end{cases}$$

である。

証明. $\mathbb{R}^0$ は、空間一点で、ド・ラームコホモロジー群の定義より、

$$H^p(\mathbb{R}^0) = \begin{cases} \mathbb{R} \cdot 1_{\mathbb{R}^0} & (p = 0) \\ 0 & (p > 0) \end{cases}$$

である。今、U は可縮であるため、標準射影 $f\colon U \to \mathbb{R}^0$ はホモトピー同値である。よって、系 11.6 より、

$$f^*\colon H^p(\mathbb{R}^0) \to H^p(U)$$

は同形であることが分かる。さらに、

$$f^*(1_{\mathbb{R}^0}) = 1_{\mathbb{R}^0} \circ f = 1_U$$

であるため、系が成り立つ。 □

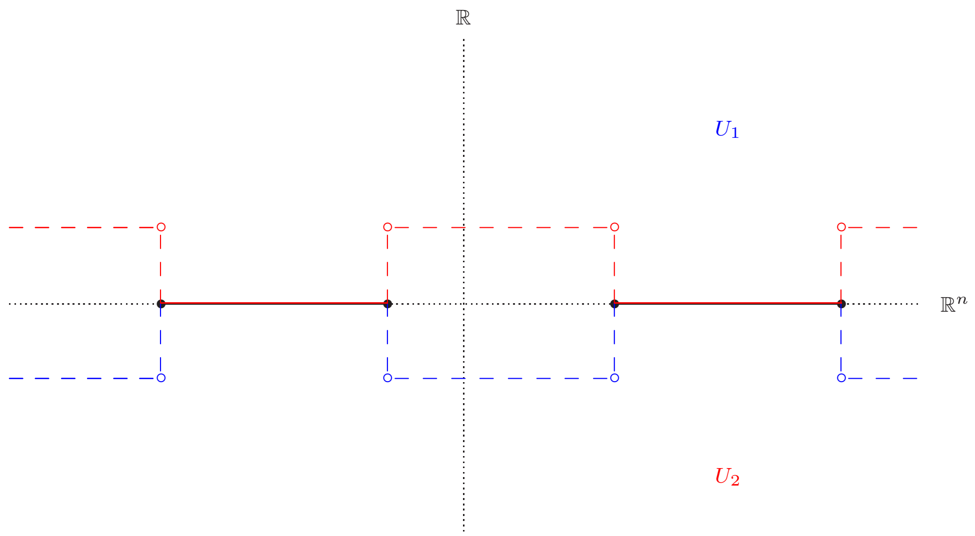
次に、A を、$\mathbb{R}^n$ でない閉集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ とし、開集合

$$U = (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \smallsetminus (A \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

を考えてみる。このとき、開集合

$$U_1 = \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \cup (\mathbb{R}^n \smallsetminus A) \times (-1, \infty) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$
$$U_2 = \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0) \cup (\mathbb{R}^n \smallsetminus A) \times (-\infty, 1) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

は、U の解被覆となる。



以下、マヤー・ビートリス系列

$$\cdots \longrightarrow H^p(U) \xrightarrow{(i_1^*, i_2^*)} H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) \xrightarrow{j_1^* - j_2^*} H^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(U) \longrightarrow \cdots$$

を考えてみる。境界準同形と標準射影

$$\mathrm{pr}_1 \colon U_1 \cap U_2 = (\mathbb{R}^n \smallsetminus A) \times (-1, 1) \to \mathbb{R}^n \smallsetminus A$$

で誘導された線形写像の合成写像は、サスペンション準同型とよばれ、

$$\sigma^* = \partial^* \circ \mathrm{pr}_1^* \colon H^p(\mathbb{R}^n \smallsetminus A) \to H^{p+1}((\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \smallsetminus (A \times \{0\}))$$

と書かれる。

命題 11.8. 真閉部分集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して、次の性質 (i)–(iii) が成り立つ。

(i) $H^0((\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \smallsetminus (A \times \{0\})) = \mathbb{R} \cdot 1_{(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \smallsetminus (A \times \{0\})}$

(ii) 次のような完全系列が成り立つ。

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}\cdot 1_{\mathbb{R}^n\setminus A} \longrightarrow H^0(\mathbb{R}^n \setminus A) \xrightarrow{\sigma^*} H^1((\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})\setminus(A\times\{0\})) \longrightarrow 0$$

(iii) 任意の $p \geqslant 1$ に対して、サスペンション準同型

$$\sigma^*\colon H^p(\mathbb{R}^n\setminus A) \to H^{p+1}((\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})\setminus(A\times\{0\}))$$

は、同型である。

証明. まず、$A \subset \mathbb{R}^n$ は真部分集合なので、開集合 $U = (\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})\setminus(A\times\{0\}) \subset \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ は連結集合であることがわかる。よって、命題の (i) が成り立つ。

次に、(iii) を示す。まず、

$$\mathrm{pr}_1^*\colon H^p(\mathbb{R}^n\setminus A) \to H^p((\mathbb{R}^n\setminus A)\times(-1,1)) = H^p(U_1\cap U_2)$$

は、同型である。なぜなら、$i\colon \mathbb{R}^n\setminus A \to (\mathbb{R}^n\times A)\times(-1,1)$ を、$i(y) = (y,0)$ で定める写像とすると、例 10.6 より、$i\circ\mathrm{pr}_1 \simeq \mathrm{id}_{(\mathbb{R}^n\setminus A)\times(-1,1)}$ と $\mathrm{pr}_1\circ i = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n\setminus A}$ を得るため、系 11.6 より、pr_1^* は同形であることが分かる。それで、$U_1 \subset \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ は、可縮である。なぜなら、例 10.6 より、id_{U_1} と $\phi(x,t) = (x,t+1)$ で定める写像 $\phi\colon U_1\to U_1$ は、ホモトピックで、ϕ と $c(x,t) = (0,1)$ で定める定数写像 $c\colon U_1\to U_1$ は、ホモトピックであるため、U_1 は可縮であることが成り立つ。同様に、U_2 は、可縮であるため、系 11.7 より、

$$H^p(U_v) = \begin{cases} \mathbb{R}\cdot 1_{U_v} & (p=0) \\ 0 & (p\neq 0) \end{cases}$$

を得る。よって、$p \geqslant 1$ のとき、マヤー・ビートリス系列より、

$$\partial^*\colon H^p(U_1\cap U_2) \to H^{p+1}(U)$$

が、同型であることが分かる。これで、(iii) を示した。

最後に、(ii) を示す。以上の計算より、$p=0$ のとき、マヤー・ビートリス系列は、

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}\cdot 1_U \xrightarrow{(i_1^*,i_2^*)} \mathbb{R}\cdot 1_{U_1}\oplus\mathbb{R}\cdot 1_{U_2} \xrightarrow{j_1^*-j_2^*} H^0(U_1\cap U_2) \xrightarrow{\partial^*} H^1(U) \longrightarrow 0$$

となることが分かる。ここで、$j_1^* - j_2^*$ の像は、$\mathbb{R}\cdot 1_{U_1\cap U_2}$ であるため、以下の図式で、上の系列は完全であることが得られる。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{R}\cdot 1_{U_1\cap U_2} \arrow[r] & H^0(U_1\cap U_2) \arrow[r, "\partial^*"] & H^1(U) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{R}\cdot 1_{\mathbb{R}^n\smallsetminus A} \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{pr}_1^*"'] & H^0(\mathbb{R}^n\smallsetminus A) \arrow[r, "\sigma^*"] \arrow[u, "\mathrm{pr}_1^*"'] & H^1(U) \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

しかし、図式が可換で、縦の写像は同形であるため、下の系列は完全でもあることが分かる。これで、(ii) が成り立つ。 □

12　ブラウワーの定理

まず、サスペンション準同型を用い、例 9.5 の一般化を示す。

定理 **12.1.** 任意の $n \geqslant 2$ に対して、

$$\dim_{\mathbb{R}} H^p(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \begin{cases} 1 & (p = 0 \text{ 及び } p = n-1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

である。

証明. 帰納法を使う。$n = 2$ のとき、定理が例 9.5 から得るため、$n = k-1$ のときを正しいと仮定し、$n = k$ のときを示せばよい。今、命題 11.8 の (iii) より、任意の $p \geqslant 2$ に対して、

$$\dim_{\mathbb{R}} H^p(\mathbb{R}^k \setminus \{0\}) = \dim_{\mathbb{R}} H^p((\mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}) \setminus (\{0\} \times \{0\})) = \dim_{\mathbb{R}} H^{p-1}(\mathbb{R}^{k-1} \setminus \{0\})$$

が分かる。さらに、命題 11.8 の (i) と (ii) より、

$$\dim_{\mathbb{R}} H^0(\mathbb{R}^k \setminus \{0\}) = 1$$
$$\dim_{\mathbb{R}} H^1(\mathbb{R}^k \setminus \{0\}) = 0$$

を得る。よって、帰納法で、定理が成り立つ。 □

注 12.2. 定理 12.1 に於ける開集合 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に関して、$n = 1$ のとき、

$$\dim_{\mathbb{R}} H^p(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \begin{cases} 2 & (p = 0) \\ 0 & (p > 0) \end{cases}$$

である。なぜなら、系 9.4 とポアンカレの補体（定理 6.4）より、

$$H^p(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \begin{cases} \mathbb{R} \cdot 1_{(-\infty,0)} \oplus \mathbb{R} \cdot 1_{(0,\infty)} & (p = 0) \\ 0 & (p > 0) \end{cases}$$

を得る。

微分同相 $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ が存在するとき、連鎖律の公式より、任意の $x \in \mathbb{R}^m$ に対して、ヤコビ行列 $D_x f$ は可逆行列であることが分かる。よって、このとき、$m = n$ が、簡単に分かる。一方、次の結果を証明するために、ここまで導入された理論の全体を必要とする。

定理 12.3 (Brouwer)**.** 同相 $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ が存在するとき、必ず $m = n$ である。

証明. $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ は同相だと、$g(x) = f(x) - f(0)$ で定める写像

$$g\colon \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

も同相である。よって、命題 11.6 より、任意の $p \geqslant 0$ に対して、誘導された写像

$$g^*\colon H^p(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to H^p(\mathbb{R}^m \setminus \{0\})$$

は、同型であることが分かる。すなわち、任意の $p \geqslant 0$ に対して、

$$\dim_{\mathbb{R}} H^p(\mathbb{R}^m \setminus \{0\}) = \dim_{\mathbb{R}} H^p(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

が分かるため、定理 12.1 と注 12.2 より、$m = n$ が成り立つ。 $\square$

n 次閉球体 D^n とその境界 S^{n-1} を復習する。

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\}, \qquad S^{n-1} = \partial D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$

補題 12.4. 任意の $x \in S^{n-1}$ に対して、$g(x) = x$ を満たすような連続写像 $g\colon D^n \to S^{n-1}$ は存在しない。

証明. 逆に、任意の $x \in S^{n-1}$ に対して、$g(x) = x$ を満たす連続写像 $g\colon D^n \to S^{n-1}$ が存在することを仮定する。例 10.6 より、$r(x) = x/\|x\|$ で定める連続写像 $r\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ は、恒道写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ とホモトピックであることが分かる。さらに、写像 $g\colon D^n \to S^{n-1}$ を用い、次のように定める連続写像 $F\colon (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times [0,1] \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ は、$c(x) = g(0)$ で定める定置写像 $c\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ から r へのホモトピーである。

$$F(x,t) = g(t \cdot r(x))$$

よって、恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ と定置写像 c は、ホモトピックであることが成り立つ。すなわち、$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ は可縮であることを示した。従って、系 11.7 より、

$$\dim_{\mathbb{R}} H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \begin{cases} 1 & (n = 1) \\ 0 & (n > 1) \end{cases}$$

を得る。しかし、定理 12.1 と注 12.2 より、

$$\dim_{\mathbb{R}} H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \begin{cases} 2 & (n=1) \\ 1 & (n>1) \end{cases}$$

ため、写像 $g\colon D^n \to S^{n-1}$ が存在する仮定に矛盾する。これで、補題を示した。 □

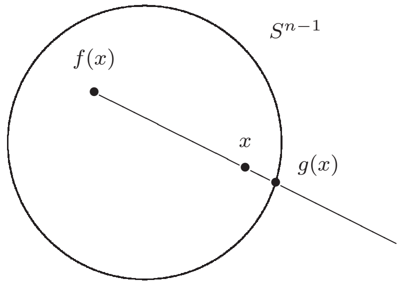
次の定理は、1912 年に Brouwer によって証明された。代数トポロジーのうち、もっとも応用されているものである。

定理 12.5 (Brouwer の不動点定理)**.** 任意の連続写像 $f\colon D^n \to D^n$ に対して、必ず

$$f(x) = x$$

を満たす点 $x \in D^n$ が存在する。

証明. 逆に、任意の $x \in D^n$ に対して、$f(x) \neq x$ を満たす連続写像 $f\colon D^n \to D^n$ が存在することを仮定する。このとき、$f(x)$ が始点 x を通る半直線と球面 S^{n-1} の交点を、$g(x)$ とすると、写像 $g\colon D^n \to S^{n-1}$ が定義される。



具体的に、x が与えられたとき、t を 2 次方程式

$$\langle tx + (1-t)f(x), tx + (1-t)f(x) \rangle = 1$$

の一意の正の実数解とすると、

$$g(x) = tx + (1-t)f(x)$$

である。よって、$g\colon D^n \to S^{n-1}$ は連続で、任意の $x \in S^{n-1}$ に対して、$g(x) = x$ を満たすことが分かる。しかし、補題 12.4 より、このような写像 g は、存在しないため、仮定されたような写像 f は存在しないことが分かる。これで、定理が得る。 □

次に、$R(x,t)=(x,-t)$ で定め、鏡映とよばれる写像

$$R\colon \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}$$

を考えてみる。命題 11.8 について、次の補遺を示す。

補遺 12.6. 任意の $A\neq\mathbb{R}^{n-1}$ を満たす閉集合 $A\subset\mathbb{R}^{n-1}$ と $p\geqslant 1$ に対して、

$$R^*=-\mathrm{id}\colon H^p((\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R})\setminus(A\times\{0\}))\to H^p((\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R})\setminus(A\times\{0\}))$$

である。

証明. 命題 11.8 の証明に於ける開集合

$$U_1=\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\infty)\cup(\mathbb{R}^{n-1}\setminus A)\times(-1,\infty)\subset\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}$$
$$U_2=\mathbb{R}^{n-1}\times(-\infty,0)\cup(\mathbb{R}^{n-1}\setminus A)\times(-\infty,1)\subset\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}$$

に関して、$R_1\colon U_1\to U_2$ と $R_2=R_1^{-1}\colon U_2\to U_1$、$R_0\colon U_1\cap U_2\to U_1\cap U_2$ を、R で誘導された微分同相とする。このとき、次の図式が可換になることが分かる。

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "R"] & U \\
U_1 \arrow[u, "i_1"] \arrow[r, "R_1"] & U_2 \arrow[u, "i_2"'] \\
U_1\cap U_2 \arrow[u, "j_1"] \arrow[r, "R_0"] & U_1\cap U_2 \arrow[u, "j_2"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "R"] & U \\
U_2 \arrow[u, "i_2"] \arrow[r, "R_2"] & U_1 \arrow[u, "i_1"'] \\
U_1\cap U_2 \arrow[u, "j_2"] \arrow[r, "R_0"] & U_1\cap U_2 \arrow[u, "j_1"']
\end{tikzcd}$$

よって、次のコチェイン複体とチェイン写像からなる図式も可換になることが分かる。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^*(U) \arrow[r, "(i_1^*,i_2^*)"] \arrow[d, "R^*"] & \Omega^*(U_1)\oplus\Omega^*(U_2) \arrow[r, "j_1^*-j_2^*"] \arrow[d, "T"] & \Omega^*(U_1\cap U_2) \arrow[r] \arrow[d, "-R_0^*"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega^*(U) \arrow[r, "(i_1^*,i_2^*)"] & \Omega^*(U_1)\oplus\Omega^*(U_2) \arrow[r, "j_1^*-j_2^*"] & \Omega^*(U_1\cap U_2) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ただし、$T(\omega_1,\omega_2)=(R_1^*(\omega_2),R_2^*(\omega_1))$ である。今、境界準同型の定義 7.9 より、以下の図式で、右辺の正方形は可換になることを得る。さらに、

$$\mathrm{pr}_1\circ R_0=\mathrm{pr}_1\colon U_1\cap U_2=(\mathbb{R}^{n-1}\setminus A)\times(-1,1)\to\mathbb{R}^{n-1}\setminus A$$

ため、左辺の正方形も可換になる。

$$\begin{tikzcd}
H^{p-1}(\mathbb{R}^{n-1}\setminus A) \arrow[r, "\mathrm{pr}_1^*"] \arrow[d, "-\mathrm{id}"] & H^{p-1}(U_1\cap U_2) \arrow[r, "\partial^*"] \arrow[d, "-R_0^*"] & H^p(U) \arrow[d, "R^*"] \\
H^{p-1}(\mathbb{R}^{n-1}\setminus A) \arrow[r, "\mathrm{pr}_1^*"] & H^{p-1}(U_1\cap U_2) \arrow[r, "\partial^*"] & H^p(U)
\end{tikzcd}$$

しかし、命題 11.8 より、任意の $p \geqslant 1$ に対して、$\sigma^* = \partial^* \circ \mathrm{pr}_1^*$ は、全射であるため、$a \in H^p(U)$ を、$a = \sigma^*(b)$ と書くと、

$$R^*(a) = R^*(\sigma^*(b)) = \sigma^*(-b) = -\sigma^*(b) = -a$$

が分かる。これで、補遺を示した。 □

系 12.7. 任意の $n \geqslant 2$ に対して、$A(x) = -x$ で定める写像 $A\colon \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ で誘導された写像は、

$$A^* = (-1)^n \,\mathrm{id}\colon H^{n-1}(\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}) \to H^{n-1}(\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\})$$

で与えられている。

証明. $R_i\colon \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ を、

$$R_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

で定める写像とすると、A が $A = R_n \circ \cdots \circ R_2 \circ R_1$ で表されるため、

$$R_i^* = -\,\mathrm{id}\colon H^{n-1}(\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}) \to H^{n-1}(\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\})$$

を示せばよい。このために、$\sigma_i\colon (\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}) \smallsetminus (\{0\} \times \{0\}) \to \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ を、

$$\sigma_i((x_1, \ldots, x_{n-1}), t) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_i, \ldots, x_{n-1})$$

で定める同相とする。このとき、

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}) \smallsetminus (\{0\} \times \{0\}) \arrow[r, "\sigma_i"] \arrow[d, "R"] & \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\} \arrow[d, "R_i"] \\
(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}) \smallsetminus (\{0\} \times \{0\}) \arrow[r, "\sigma_i"] & \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}
\end{tikzcd}$$

が可換になるため、

$$\begin{tikzcd}
H^{n-1}((\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}) \smallsetminus (\{0\} \times \{0\})) & H^{n-1}(\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}) \arrow[l, "\sigma_i^*"'] \\
H^{n-1}((\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}) \smallsetminus (\{0\} \times \{0\})) \arrow[u, "R^*"] & H^{n-1}(\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}) \arrow[l, "\sigma_i^*"'] \arrow[u, "R_i^*"]
\end{tikzcd}$$

も可換になることが分かる。σ_i^* は線形同形であるため、補遺 12.6 より、

$$R_i^*(a) = (\sigma_i^*)^{-1}(R^*(\sigma_i^*(a)) = (\sigma_i^*)^{-1}(-\sigma_i^*(a)) = (\sigma_i^*)^{-1}(\sigma_i^*(-a)) = -a$$

が成り立つ。これで、系を示した。 □

定義 **12.8.** 球面 S^{n-1} 上連続の接ベクトル場とは、任意の $x \in S^{n-1}$ に対して、

$$\langle x, \mathfrak{X}(x) \rangle = 0$$

を満たす連続写像 $\mathfrak{X}\colon S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ のものである。

例 12.9. $n = 2m$ は偶数のとき、次のように S^{2m-1} 上連続の接ベクトル場が定義される。

$$\mathfrak{X}(x_1, x_2, \ldots, x_{2m-1}, x_{2m}) = (-x_2, x_1, \ldots, -x_{2m}, x_{2m-1})$$

任意の $x \in S^{n-1}$ に対して、$\|\mathfrak{X}(x)\| = 1$ であるため、任意の $x \in S^{n-1}$ に対して、$\mathfrak{X}(x) \neq 0$ である。

次の定理は、$n = 3$ のとき、Poincaré によって 1885 年に証明され、$n \geqslant 3$ のとき、Brouwer によって 1911 年に証明された。

定理 **12.10** (Poincaré, Brouwer)**.** $n \geqslant 3$ は奇数なら、任意の S^{n-1} 上連続接ベクトル場

$$\mathfrak{X}\colon S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$$

に対して、必ず $\mathfrak{X}(x) = 0$ を満たす点 $x \in S^{n-1}$ が存在する。

証明. 逆に、任意の $x \in S^{n-1}$ に対して、$\mathfrak{X}(x) \neq 0$ を満たす連続の接ベクトル場が存在することを仮定する。このとき、

$$F(x, t) = (\cos \pi t)x + (\sin \pi t)\mathfrak{X}(x/\|x\|)$$

で定める連続写像 $F\colon (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ は、恒等写像から系 12.7 に於ける写像 A へのホモトピーとなる。よって、定理 11.4 より、

$$A^* = (\mathrm{id})^* = \mathrm{id}\colon H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

が分かる。しかし、系 12.7 より、

$$A^* = (-1)^n \,\mathrm{id}\colon H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

であるため、仮定に矛盾する。これで、定理を示した。 □

例 12.11. 定理 12.10 により、地球上で水平風速が 0 であるような場所が必ずあることが分かる。