

幾何学IV／幾何学概論IV：レポート問題その1

11月7日17:00までに理1号館105号室で出して下さい。

問題 1. (1) 次のように定める線形写像は、同型であることを示せ。

$$\begin{aligned} i: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \text{Alt}^1(\mathbb{R}^3), & i(w)(v) &= \langle w, v \rangle \\ j: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \text{Alt}^2(\mathbb{R}^3), & j(w)(v_1, v_2) &= \det(w, v_1, v_2) \end{aligned}$$

ここで、 $\langle -, - \rangle$ は、 $\mathbb{R}^3$ の標準内積である。

(2) 任意の $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ に対して、

$$i(v_1) \wedge i(v_2) = j(v_1 \times v_2)$$

であることを示せ。ここで、 $- \times -$ とは、 $\mathbb{R}^3$ のクロス積である。

問題 2. 線形写像 $f: V \rightarrow W$ と交代式 $\omega_1 \in \text{Alt}^p(W)$ 、 $\omega_2 \in \text{Alt}^q(W)$ に対して、

$$\text{Alt}^{p+q}(f)(\omega_1 \wedge \omega_2) = \text{Alt}^p(f)(\omega_1) \wedge \text{Alt}^q(f)(\omega_2)$$

を示せ。

問題 3. 内積 $\langle -, - \rangle$ つき有限次元 n ベクトル空間 V とその正規直交基底 $\{b_1, \dots, b_n\} \subset V$ をおいておく。

(1) 次のように定める線形写像は同型であることを示せ。

$$i: V \rightarrow \text{Alt}^1(V), \quad i(v)(w) = \langle v, w \rangle$$

(ヒント： $i(b_j) = b_j^*$ を示せばよい。ここで、 $\{b_1^*, \dots, b_n^*\} \subset \text{Alt}^1(V)$ は反対基底である。)

与えられた V 上内積 $\langle -, - \rangle$ は、次のように定める $\text{Alt}^p(V)$ 上内積 $\langle -, - \rangle_p$ を誘導する。

$$\left\langle \sum_{\sigma \in S_{p,n-p}} \lambda_{\sigma} b_{\sigma(1)}^* \wedge \cdots \wedge b_{\sigma(p)}^*, \sum_{\sigma \in S_{p,n-p}} \lambda'_{\sigma} b_{\sigma(1)}^* \wedge \cdots \wedge b_{\sigma(p)}^* \right\rangle_p = \sum_{\sigma \in S_{p,n-p}} \lambda_{\sigma} \lambda'_{\sigma}$$

誘導された内積 $\langle -, - \rangle_p$ ($p \geq 1$) に対して、以下の性質 (2)–(3) を示せ。

(2) 任意の $v, w \in V$ に対して、

$$\langle i(v), i(w) \rangle_1 = \langle v, w \rangle$$

である。

(3) 任意の $\omega_1, \dots, \omega_p, \tau_1, \dots, \tau_p \in \text{Alt}^1(V)$ に対して、

$$\langle \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p, \tau_1 \wedge \dots \wedge \tau_p \rangle_p = \det \begin{pmatrix} \langle \omega_1, \tau_1 \rangle_1 & \dots & \langle \omega_1, \tau_p \rangle_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \omega_p, \tau_1 \rangle_1 & \dots & \langle \omega_p, \tau_p \rangle_1 \end{pmatrix}$$

である。