

幾何学IV/幾何学概論IV：レポート問題その2

12月6日17:00までに理1号館105室で出して下さい。

問題 1. 内積 $\langle -, - \rangle$ つき有限次元 n 実ベクトル空間 V をおいておき、レポート問題その1で勉強した、 $\text{Alt}^p(V)$ 上誘導された内積 $\langle -, - \rangle_p$ を想起する。特に、1次元ベクトル空間 $\text{Alt}^n(V)$ の内積 $\langle -, - \rangle_n$ に対して、 $\langle \text{vol}, \text{vol} \rangle_n = 1$ を満たす元 $\text{vol} \in \text{Alt}^n(V)$ は、ただ一つある。

(1) 次の性質を持つ線形写像 $*$: $\text{Alt}^p(V) \rightarrow \text{Alt}^{n-p}(V)$ は、ただ一つが存在することを示せ。
「任意の $\omega \in \text{Alt}^p(V)$ 、 $\tau \in \text{Alt}^{n-p}(V)$ に対して、

$$\langle *\omega, \tau \rangle_{n-p} \text{vol} = \omega \wedge \tau$$

である。」(線形写像 $*$ は、ホッジの $*$ 演算子と呼ばれる。)

(2) $\text{vol}(b_1, \dots, b_n) = 1$ を満たす正規直交基底 $\{b_1, \dots, b_n\} \subset V$ とその反対基底 $\{b_1^*, \dots, b_n^*\} \subset \text{Alt}^1(V)$ において、任意の $0 \leq p \leq n$ に対して、

$$*(b_1^* \wedge \dots \wedge b_p^*) = b_{p+1}^* \wedge \dots \wedge b_n^*$$

であることを示せ。

(3) 任意の $0 \leq p \leq n$ 、 $\sigma \in S_{p, n-p}$ に対して、

$$*(b_{\sigma(1)}^* \wedge \dots \wedge b_{\sigma(p)}^*) = \text{sgn}(\sigma) b_{\sigma(p+1)}^* \wedge \dots \wedge b_{\sigma(n)}^*$$

であることを示せ。

(4) 任意の $0 \leq p \leq n$ に対して、

$$* \circ * = (-1)^{p(n-p)}: \text{Alt}^p(V) \rightarrow \text{Alt}^p(V)$$

であることを示せ。