練習問題その１０

問題 1. ベクトル空間 V とその二つのベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ を考える。次のベクトルに対して、自明でない 1 次関係を求めよ。(1 次関係とは、零ベクトルと等しい 1 次結合である。)

(i) $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}$

(ii) $\mathbf{0}$, $\mathbf{u}$

(iii) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $\mathbf{v}$

問題 2. ベクトル空間 V と 1 次独立である部分集合 $S = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\} \subset V$ を考える。次のように定義された部分集合 $S' \subset V$ も 1 次独立であることを示せ。

$$S' = \{\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{w} + \mathbf{u}\}$$

問題 3. 次のように定める部分空間 $W \subset \mathbb{R}^3$ の基底を求めよ。

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 = x_3 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

問題 4. 有限次元のベクトル空間 V に対して、次の命題を示せ。

(i) V を生成する部分集合 $T = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_h\} \subset V$ に対して、T が V の基底であることと T の個数 h が $\dim(V) = n$ と等しいことは同値である。

(ii) 1 次独立である部分集合 $S = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\} \subset V$ に対して、S が V の基底であることと S の個数 k が $\dim(V) = n$ と等しいことは同値である。

(ヒント：定理 7 を使えば良い。)