

## 練習問題その 1 2

**問題 1.**  $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  を次のように定める線形写像とする。

$$F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (i)  $F$  の退化次数と階数を求めよ。
- (ii)  $\ker(F)$  の基底  $R$ 、 $\operatorname{im}(F)$  の基底  $S$  を求めよ。

**問題 2.**  $F: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$  を次のように定める線形写像とする。

$$F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (i)  $F$  の退化次数と階数を求めよ。
- (ii)  $\ker(F)$  の基底  $R$ 、 $\operatorname{im}(F)$  の基底  $S$  を求めよ。

**問題 3.** 線形写像  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  に対して、次の命題は同値であることを示す。

- (i)  $F$  は、全射である。
- (ii)  $F$  は、単射である。
- (iii)  $F$  は、全単射である。