

練習問題その5

問題 1. 次の正方行列の逆行列を求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(5) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

問題 2. 逆行列を用いて、次の連立1次方程式を解け。

$$(1) \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

問題 3. n 次正方行列 A と B について、次の命題を示せ。

(1) A が可逆であるとき、その逆行列 A^{-1} も可逆で、 $(A^{-1})^{-1} = A$ である。

(2) A が可逆であるとき、その転置行列 ${}^t A$ も可逆で、 $({}^t A)^{-1} = {}^t (A^{-1})$ である。

(3) A と B が可逆であるとき、それらの積 AB も可逆で、 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ である。

問題 4. A を、ある自然数 m に対して、 $A^m = O$ を満たすような正方行列とする。このとき、 $E - A$ が可逆であることを示せ。また、 $E - A$ の逆行列を求めよ。