

練習問題その6

問題 1. 次の正方行列の行列式を計算せよ。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 13 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 1 & 2 & 2 \\ 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 7 & -6 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & 11 & 0 \\ 2 & -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 2. 次のような正方行列は、**上三角行列**と呼ばれる。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

帰納法を用い、上三角行列 A に対して、

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} \cdots a_{nn}$$

を示せ。

問題 3. n 次正方行列 D をおいておく。帰納法を用い、 m 次正方行列 A と $m \times n$ 行列 B に対して、次の公式を示せ。

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} = \det(A) \det(D)$$

(まず、 $m = 1$ のときを考えればよい。)