2　行列と線形写像

前回、$\mathbb{R}^n$ を n 次列ベクトルのなす集合と定義した。

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

定義 **1.** 次の性質 (1)–(2) を満たす写像 $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は、線形写像（linear map）と呼ばれる。

(1) (F はスカラー積を保つ) 任意の $s \in \mathbb{R}$ と $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$F(s\mathbf{x}) = sF(\mathbf{x})$$

である。

(2) (F はベクトル和を保つ) 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$F(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = F(\mathbf{x}) + F(\mathbf{y})$$

である。

命題 **2.** 任意の線形写像 $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は、次のように表される。

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ただし、

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}、\quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}、\quad \cdots \quad、\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。

授業ノート等：www.math.nagoya-u.ac.jp/~larsh/teaching/F2012_T

証明. 任意の n 次列ベクトルは、一意に次のように表される。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

したがって、定義 1 より、

$$\begin{aligned}
F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= F\Bigg(x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\Bigg) \\
&\overset{(2)}{=} F\Bigg(x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\Bigg) + F\Bigg(x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\Bigg) + \cdots + F\Bigg(x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\Bigg) \\
&\overset{(1)}{=} x_1 F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n F\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

である。これで、命題を示した。 □

定義 3. 命題 2 における $m \times n$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

は、線形写像 $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の（基本基底に関する）表現行列と呼ばれる。

例 4. A 社は、以下の原材料からスポーツドリンクを生産している：x_1g の水、x_2g の砂糖、x_3g のぶどう糖果糖液糖、x_4g の果汁、x_5g のぶどう糖、x_6g の食塩、x_7g の酸味料、x_8g の塩化 K、x_9g の乳酸 Ca、x_{10}g の調味料、x_{11}g の塩化 Mg、x_{12}g の香料、x_{13}g の酸化防止剤

すなわち、ドリンクの組成は次のベクトルで表される。

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{13} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{13}$$

それに対して、ドリンクの製品の価格は次の線形写像で表される。

$$F\colon \mathbb{R}^{13} \to \mathbb{R}, \qquad F(\mathbf{x}) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{13}x_{13} = A\mathbf{x}$$

ここで、原料の価格は、行列 $A = (a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_{13})$ で表される。現実の世界では、変数 x_i の数は、通常、1 万程度である。よって、高次元ベクトル空間が多い。

例 5. (1) 命題 2 より、空間内の「$x = z$」で定義された平面に関して対称な点を対応させる線形写像 $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ は、次のように表される。

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(2) 空間内に点を y 軸に関して反時計まわりに $\pi/2$ 回転させる線形写像 $G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ は、

$$G\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と表される。

命題 6. 線形写像 $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ と $G\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ を、次のようにそれぞれの $m \times n$ 行列 A と $n \times p$ 行列 B で表しておく。

$$F(\mathbf{y}) = A\mathbf{y}, \qquad G(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$$

このとき、合成写像 $F \circ G\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ が、次のように $m \times p$ 行列 AB で表される。

$$(F \circ G)(\mathbf{x}) = AB\mathbf{x}$$

証明. 合成写像の定義より、$(F \circ G)(\mathbf{x}) = F(G(\mathbf{x}))$ ため、命題 2 より、

$$(F \circ G)(\mathbf{x}) = F(B\mathbf{x}) = A(B\mathbf{x}) = (AB)\mathbf{x}$$

が成り立つ。 □

例 7. 以上の例 5 における線形写像 $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ と $G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ について、

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なので、命題 6 より、合成写像 $F \circ G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ は次のように表される。

$$(F \circ G) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

よって、$F \circ G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ は、平面「$x = 0$」に関して対称な点を対応させる線形写像であることが分かる。

次に、行列の分割（partition）を考える。行列をいくつかの小さな行列に分割すると、計算が容易になることが多い。$m \times n$ 行列 A を、以下のように $m_i \times n_j$ 行列 A_{ij}（$i = 1, 2, \ldots, r$、$j = 1, 2, \ldots, s$）に分割するとき、

$$m = m_1 + m_2 + \cdots + m_r$$

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_s$$

が必要である。ここで、行列 A_{ij} は、分割された行列 A のブロック（block）と呼ばれる。

$$A = \left(\begin{array}{c:c:c:c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{array}\right)$$

例 8.

$$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & -2 & 0 \\ \hdashline -1 & -3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{ll} A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} & A_{12} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \\ A_{21} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} & A_{22} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

命題 **9.** A と B を次のように分割された $m \times n$ 行列とする。A の n 個の列の分割と B の n 個の行の分割が同じであることを仮定する。

$$A = \left(\begin{array}{c:c:c:c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{array}\right), \qquad B = \left(\begin{array}{c:c:c:c} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ \hdashline B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st} \end{array}\right).$$

このとき、$m \times p$ 行列 $C = AB$ は、次のように分割される。

$$C = AB = \left(\begin{array}{c:c:c:c} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1t} \\ \hdashline C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2t} \\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline C_{r1} & C_{r2} & \cdots & A_{rt} \end{array}\right), \qquad C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{is}B_{sj}$$

注 10. 命題 9 より、分割された行列 A と B の積を計算するとき、A と B の各ブロックの行列を一般の“数”であるように考えればよい。しかし、その“数”の順序を変更しないようにする必要がある。

例 11. 次の 4 次の正方行列の n 乗を計算するために、示したように分割する。

$$A = \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} E & B \\ O & E \end{pmatrix}$$

命題 9 より、

$$A^n = \begin{pmatrix} E & B \\ O & E \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} E & nB \\ O & E \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -2n & n \\ 0 & 1 & 3n & -n \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

であることが分かる。

定義 **12.** A を次の分割された $m \times n$ 行列 A とする。

$$A = \left(\begin{array}{c:c:c:c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{array}\right)$$

これについて、$r = m$ と $s = 1$ の場合には、行ベクトルへの分割と呼ばれ、$r = 1$ と $s = n$ の場合には、列ベクトルへの分割と呼ばれる。

列ベクトルは、$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ などのアルファベットの小文字の太字で書かれる。$\mathbf{a}$ は列ベクトルのとき、転置行列 ${}^t\mathbf{a}$ は行ベクトルなので、行ベクトルは、${}^t\mathbf{a}, {}^t\mathbf{b}, \ldots, {}^t\mathbf{x}, {}^t\mathbf{y}, {}^t\mathbf{z}$ などと書かれる。よって、それぞれの行ベクトルに分割された行列と列ベクトルに分割された行列は、次のようにも表される。

$$A = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{a}_1 \\ {}^t\mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{a}_m \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{pmatrix}$$

行ベクトルへの分割　　　　列ベクトルへの分割