4　行列の簡約化

定義 **1.** 行列の零ベクトルでない行の 0 でない左から最初の成分はその行の主成分（pivot）と呼ばれる。

例 2. 次の行列 A の第 1 行の主成分は 3、第 2 行の主成分は 1、第 4 行の主成分は 2 である。第 3 行は零ベクトルなので、主成分はない。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

定義 **3.** 次の性質を満たす行列は簡約な行列（reduced row echelon matrix）と呼ばれる。

(I) 行ベクトルのうちに零ベクトルがあれば、それ以下の行ベクトルも零ベクトルである。

(II) 零ベクトルでない行ベクトルの主成分は 1 である。

(III) 第 i 行の主成分を a_{ij_i} とすると、$j_1 < j_2 < j_3 < \ldots$ となる。

(IV) 各行の主成分を含む列の他の成分は全て 0 である。

例 4. （簡約な行列の例）

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例 5. （簡約でない行列の例）

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

授業ノート等：`www.math.nagoya-u.ac.jp/~larsh/teaching/F2012_T`

定理 **6.** 任意の行列 A は、行基本変形を繰り返すことにより簡約化できる。また、簡約化した行列 B は、行基本変形の方法によらず一意的である。

証明. 教科書をご覧ください。 □

例 7. 例 2 で考えた行列 A を簡約化する。

$$
\begin{aligned}
A = &\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} ① \times (1/3) \\ \\ \\ ④ \times (1/2) \end{array} \\
&\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} ① \text{ と } ② \text{ を入れ替えた} \\ \\ ③ \text{ と } ④ \text{ を入れ替えた} \\ \\ \end{array} \\
B = &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} ① + ③ \times (-2) \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{aligned}
$$

定義 **8.** A を簡約化した行列 B の主成分の個数は、A の階数とよばれ、$\mathrm{rank}(A)$ と書かれる。

注 9. 必ずしも簡約でない行列 A の主成分の個数は、$\mathrm{rank}(A)$ 以上である。

例 10. 例 4 における行列の階数を計算する。

$$
\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\,, \qquad \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3
$$

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 3\,, \qquad \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

例 11. 例 5 における行列の階数を計算する。

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 3$$

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

命題 12. $m \times n$ 行列 A に対して、 $\mathrm{rank}(A) \leqslant \min\{m, n\}$ である。

証明. A を簡約化した行列 B も $m \times n$ 行列である。よって、

$$\mathrm{rank}(A) = B \text{ の主成分を含む行の個数} \leqslant m$$
$$\mathrm{rank}(A) = B \text{ の主成分を含む列の個数} \leqslant n$$

である。 □

簡約化を用いて、連立 1 次方程式を解く。まず、二つの例を考えてみる。

例 13. 次の連立 1 次方程式を解いてみる。

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 \phantom{{}+x_2} - x_3 \phantom{{}+x_4} - 2x_5 = 1 \\ \phantom{x_1 +{}} x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4} + x_5 = -2 \\ -x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \phantom{{}+x_4} - 3x_5 = 1 \end{cases}$$

連立 1 次方程式の拡大係数行列 $(A \mid \mathbf{b})$ を簡約化する。

$$(A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ ③ + ① \\ ④ + ① \times (-2) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ ④ + ② \times (-1) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} ① + ④ \times (-1) \\ ② + ④ \times 2 \\ ③ + ④ \times (-4) \\ \\ \end{array}$$

よって、連立 1 次方程式 (1) の解集合と次の連立 1 次方程式 $(1')$ の解集合は等しい。

$$(1') \qquad \begin{cases} x_1 \quad\quad - x_3 \quad\quad - 2x_5 = 0 \\ \quad x_2 + x_3 \quad\quad + x_5 = 0 \\ \quad\quad\quad\quad x_4 - x_5 = 0 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad 0 = 1 \end{cases}$$

しかし、$0 \neq 1$ ため、連立 1 次方程式 $(1')$ は、解を持たない。

例 14. 次の連立 1 次方程式を考えてみる。

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1 - 2x_2 \quad\quad + 3x_4 \quad\quad = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 5 \end{cases}$$

連立 1 次方程式の拡大係数行列 $(A \mid \mathbf{b})$ を簡約化する。

$$
\begin{aligned}
(A \mid \mathbf{b}) &= \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 2 & 5 \end{array}\right) \\
&\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \\ ② + ① \times (-1) \\ ③ + ① \times (-2) \end{array} \\
&\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \\ \\ ③ + ② \times (-1) \end{array} \\
&\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \\ ② + ③ \times (-1) \\ \\ \end{array}
\end{aligned}
$$

よって、連立 1 次方程式 (2) の解集合は、次の連立 1 次方程式 $(2')$ の解集合と等しい。

$$
(2') \qquad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 2 \\ x_3 - x_4 = -1 \\ x_5 = 1 \end{cases}
$$

連立 1 次方程式 $(2')$ は解を持ち、次のように表される。主成分を含まない列に対応する変数 x_2, x_4 の値を任意に定めると、主成分を含む列と対応する変数 x_1, x_3, x_5 は、一意的に決まる。すなわち、$x_2 = c_1$ と $x_4 = c_2$ とおくと、方程式 (2) の解集合は、次のように表される。

$$
\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 2c_1 - 3c_2 \\ c_1 \\ -1 + c_2 \\ c_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})
$$

注 15. 連立 1 次方程式 (1) において、その拡大係数行列を簡約化した行列の最も右の列は、主成分を含むため、解を持たない。連立 1 次方程式 (2) において、拡大係数行列を簡約化した行列の最も右の列は、主成分を含まないため、解を持つ。

定理 16. 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解を持つ必要十分条件は,

$$\mathrm{rank}(A \mid \mathbf{b}) = \mathrm{rank}(A)$$

である。

証明. A を $m \times n$ 行列とする。

まず、$\mathrm{rank}(A \mid \mathbf{b}) = \mathrm{rank}(A)$ を仮定し、$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解を持つことを示す。$(A \mid \mathbf{b})$ を簡約化した行列 $(C \mid \mathbf{d})$ の主成分を含む列と主成分を含まない列を、それぞれ $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ と $k_1 < k_2 < \cdots < k_{s+1}$ とする。このとき、$r + s + 1 = n + 1$ である。$\mathrm{rank}(A \mid \mathbf{b}) = \mathrm{rank}(A)$ より、$(C \mid \mathbf{d})$ の最も右の列 $\mathbf{d}$ は、主成分を含まないため、$k_{s+1} = n + 1$ が分かる。さらに、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解集合と次の連立 1 次方程式の解集合は等しい。

$$\begin{cases} x_{j_1} = d_1 - c_{1,k_1}x_{k_1} - c_{1,k_2}x_{k_2} - \cdots - c_{1,k_s}x_{k_s} \\ x_{j_2} = d_2 - c_{2,k_1}x_{k_1} - c_{2,k_2}x_{k_2} - \cdots - c_{2,k_s}x_{k_s} \\ \qquad \vdots \\ x_{j_r} = d_r - c_{r,k_1}x_{k_1} - c_{r,k_2}x_{k_2} - \cdots - c_{r,k_s}x_{k_s} \end{cases}$$

よって、変数 $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_s}$ の値を任意に定めると、変数 $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ は、一意的に決まる。特に、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は、解を持つことが分かる。

逆に、$\mathrm{rank}(A \mid \mathbf{b}) \neq \mathrm{rank}(A)$ のとき、拡大係数行列 $(A \mid \mathbf{b})$ を簡約化した行列 $(C \mid \mathbf{d})$ の最も右の列 $\mathbf{d}$ は、主成分を含むことが分かる。$(C \mid \mathbf{d})$ の主成分を含む列と主成分を含まない列を、それぞれ $j_1 < j_2 < \cdots < j_{r+1}$ と $k_1 < k_2 < \cdots < k_s$ とすると、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解集合は、次の連立 1 次方程式の解集合と等しいことを得る。

$$\begin{cases} x_{j_1} = d_1 - c_{1,k_1}x_{k_1} - c_{1,k_2}x_{k_2} - \cdots - c_{1,k_s}x_{k_s} \\ x_{j_2} = d_2 - c_{2,k_1}x_{k_1} - c_{2,k_2}x_{k_2} - \cdots - c_{2,k_s}x_{k_s} \\ \qquad \vdots \\ x_{j_r} = d_r - c_{r,k_1}x_{k_1} - c_{r,k_2}x_{k_2} - \cdots - c_{r,k_s}x_{k_s} \\ \quad 1 = 0 \end{cases}$$

しかし、この連立 1 次方程式は、解を持たないため、$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ も解を持たないことが分かる。これで、定理を示した。 □

補遺 **17.** m 個の方程式からなる n 変数の連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ とその $m \times (n+1)$ 型の拡大係数行列 $(A \mid \mathbf{b})$ において、

$$\mathrm{rank}(A \mid \mathbf{b}) = \mathrm{rank}(A)$$

を仮定し、その階数を r とする。

(i) $r = n$ のとき、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は、ただ一つの解を持つ。

(i) $r < n$ のとき、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解集合

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}\} \subset \mathbb{R}^n$$

は、$n - r$ 個のパラメーター $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$ で表される。

証明. 拡大係数行列 $(A \mid \mathbf{b})$ を簡約化した行列を $(C \mid \mathbf{d})$ とする。

(i) 仮定 $r = n$ より、$C = E_n$ が分かる。従って、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解集合は、連立 1 次方程式 $E_n\mathbf{x} = \mathbf{d}$ の解集合と等しいため、$\mathbf{x} = \mathbf{d}$ はただ一つの解であることが分かる。

(ii) 行列 C の主成分を含まない列と対応する変数 $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_{n-r}}$ の値を任意に定めると、主成分を含む列と対応する変数 $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ は、一意的に決まる。 □

例 18. 次の連立 1 次方程式を解いてみる。

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \phantom{{}+x_3} + 3x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = -2 \end{cases}$$

拡大係数行列 $(A \mid \mathbf{b})$ を簡約化する。

$$(A \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -5 \end{array}\right) \qquad ② + ① \times (-1)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -5 \end{array}\right) \qquad ① + ② \times 2$$

これを見ると、$\mathrm{rank}(A \mid \mathbf{b}) = \mathrm{rank}(A) = 2$ が分かる。よって、補遺 17 の (ii) より、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解集合は、$n - r = 4 - 2 = 2$ 個のパラメーター c_1, c_2 で表される。簡約化した拡大係数行列と対応する連立 1 次方程式は、次のように得られる。

$$\begin{cases} x_1 & & + & 2x_3 & + & x_4 & = & -7 \\ & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & -5 \end{cases}$$

よって、解集合 $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ は、次のように表される。

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -7 - 2c_1 - c_2 \\ -5 - \ \ c_1 + c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}^2)$$