5 可逆行列

以下、正方行列を考える。

定義 1. A を正方行列とする。

(1) $AC = E_n = CA$ を満たす正方行列 C は、A の逆行列と呼ばれ、A^{-1} と書かれる。

(2) A を逆行列を持つとき、可逆行列あるいは正則行列と呼ばれる。

注 2. (i) 可逆行列 A^{-1} は、一意である。なぜなら、$AC = E_n = CA$ と $AD = E_n = DA$ のとき、

$$C = CE_n = C(AD) = (CA)D = E_nD = D$$

が成り立つ。

(ii) A と B は可逆行列であるとき、AB も可逆行列で、

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

である。

定理 3. n 次正方行列 A に対して、次の性質 (i)–(ii) は、同値である。

(i) A は、可逆行列である。

(ii) $AC = E_n$ を満たす正方行列 C が存在する。

このとき、$A^{-1} = C$ である。

証明. 授業 7 で示す。 □

補題 4. n 次正方行列 A に対して、次の性質は同値である。

(i) $AC = E_n$ を満たす n 次正方行列 C が存在する。

(ii) 任意の n 次列ベクトル $\mathbf{b}$ に対して、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は解を持つ。

授業ノート等：`www.math.nagoya-u.ac.jp/~larsh/teaching/F2012_T`

証明. (i)⇒(ii)：$\mathbf{x} = C\,\mathbf{b}$ とすると、

$$A\mathbf{x} = A(C\,\mathbf{b}) = (AC)\mathbf{b} = E_n\mathbf{b} = \mathbf{b}$$

が成り立つ。

(ii)⇒(i)：n 次列ベクトル $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ を、

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \cdots, \qquad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくと、仮定より、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$, $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_2$, ..., $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_n$ は、解を持つ。それらを、各々 $\mathbf{x} = \mathbf{c}_1$, $\mathbf{x} = \mathbf{c}_2$, ..., $\mathbf{x} = \mathbf{c}_n$ とし、

$$C = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_n \end{pmatrix}$$

とすると、C は n 次正方行列で、

$$AC = A\begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\mathbf{c}_1 & A\mathbf{c}_2 & \cdots & A\mathbf{c}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{pmatrix} = E_n$$

を満たす。これで、補題を示した。 □

命題 5. A を $\mathrm{rank}(A) = n$ を満たす n 次正方行列とする。このとき、$(E_n \mid C)$ を $n \times 2n$ 行列 $(A \mid E_n)$ を簡約化した行列とすると、n 次正方行列 C は $AC = E_n$ を満たす。

証明. なぜなら、C を $\begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_n \end{pmatrix}$ と書くと、任意の $j = 1, 2, \ldots n$ に対して、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$ と $\mathbf{x} = \mathbf{c}_j$ の解集合は等しいため、$AC = E_n$ が成り立つ。 □

注 6. 定理 3 より、命題 5 に於ける n 次正方行列 C は、元の n 次正方行列 A の逆行列であることが分かる。すなわち、$C = A^{-1}$ である。

例 7. 以下、注 6 で説明したように、次の正方行列 A の逆行列 A^{-1} を計算してみる。

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

行列 $(A \mid E_3)$ を簡約化する。

$$\begin{aligned}
(A \mid E_3) = & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} ① + ③ \times (-3) \\ ② + ③ \times (-1) \\ \end{array} \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & 3 & 0 & -8 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ ② + ① \times (-1) \\ ③ + ① \times 3 \end{array} \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 7 & 6 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} ① + ② \times 2 \\ \\ ③ + ② \times 7 \end{array} \\
(E_3 \mid A^{-1}) = & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 7 & 6 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} ① \times (-1) \\ ② \times (-1) \\ \end{array}
\end{aligned}$$

よって、$\mathrm{rank}(A) = 3$ で、

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

が分かる。

例 8. 同様に、次の正方行列 A の逆行列 A^{-1} を計算してみる。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

行列 $(A \mid E_3)$ を簡約化する。

$$
\begin{aligned}
(A \mid E_3) &= \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \text{②} + \text{①} \times (-3) \\ \text{③} + \text{①} \times (-2) \end{array} \\
&\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ \text{③} + \text{②} \times (-2) \end{array} \\
&\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -{}^{3}\!/_{2} & {}^{1}\!/_{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -{}^{4}\!/_{3} & {}^{2}\!/_{3} & -{}^{1}\!/_{3} \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \text{②} \times (1/2) \\ \text{③} \times (-1/3) \end{array} \\
&\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -{}^{1}\!/_{6} & -{}^{1}\!/_{6} & {}^{2}\!/_{6} \\ 0 & 0 & 1 & -{}^{4}\!/_{3} & {}^{2}\!/_{3} & -{}^{1}\!/_{3} \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \text{②} + \text{③} \times (-1) \\ \\ \end{array} \\
(E_3 \mid A^{-1}) &= \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & {}^{5}\!/_{6} & -{}^{1}\!/_{6} & {}^{2}\!/_{6} \\ 0 & 1 & 0 & -{}^{1}\!/_{6} & -{}^{1}\!/_{6} & {}^{2}\!/_{6} \\ 0 & 0 & 1 & -{}^{4}\!/_{3} & {}^{2}\!/_{3} & -{}^{1}\!/_{3} \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \text{①} + \text{②} \\ \\ \\ \end{array}
\end{aligned}
$$

よって、$\mathrm{rank}(A) = 3$ で、

$$A^{-1} = {}^{1}\!/_{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -8 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

が分かる。