7　行列式の性質

帰納法を用い、n 次の正方行列 A の行列式 $\det(A)$ を、次のように定義した。$n=1$ のとき、$\det(A)=a_{11}$ で、$n>1$ のとき、

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\det(A_{1j})$$

である。ただし、A_{1j} は、行列 A から第 1 行と第 j 列を除いた $n-1$ 次の正方行列である。

定理 **1** (行列式の基本定理)**.** 次の性質 (1)—(4) を満たす写像

$$\det\colon M_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$$

は、ただ一つが存在する。

(1) 任意の $1\leqslant i\leqslant n$ と行ベクトル $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_{i-1},\boldsymbol{a}_{i+1},\ldots,\boldsymbol{a}_n$、$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ に対して、

$$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_{i-1}\\ \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{a}_{i+1}\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_n\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_{i-1}\\ \boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{a}_{i+1}\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_n\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_{i-1}\\ \boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{a}_{i+1}\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_n\end{pmatrix}$$

である。

(2) 任意の $1\leqslant i\leqslant n$、行ベクトル $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_{i-1},\boldsymbol{a}_{i+1},\ldots,\boldsymbol{a}_n$、$\boldsymbol{x}$ とスカラー s に対して、

$$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_{i-1}\\ s\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{a}_{i+1}\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_n\end{pmatrix}=s\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_{i-1}\\ \boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{a}_{i+1}\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_n\end{pmatrix}$$

授業ノート等：`www.math.nagoya-u.ac.jp/~larsh/teaching/F2012_T`

である。

(3) 任意の $1 \leqslant i < j \leqslant n$ と行ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ に対して、

$$「\ \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_j \qquad \text{ならば} \qquad \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} = 0\ 」$$

である。

(4) 単位行列 E_n に対して、

$$\det(E_n) = 1$$

である。

この定理から、行列式の各性質が成り立つ。

系 **2.** n 次行列式に対して、次の性質が成り立つ。

(5) 任意の n 次正方行列 A と B に対して、

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(BA)$$

である。

(6) 任意の n 次正方行列 A に対して、

$$\det({}^tA) = \det(A)$$

である。

(7) 任意の n 次正方行列 A に対して、

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij}) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij})$$

である。ここで、A_{ij} は、A から第 i 行と第 j 列を除いた $n-1$ 次正方行列である。

(8) B を、正方行列 A の第 i 行を s 倍した行列とすると、

$$\det(B) = s \det(A)$$

である。

(9) B を、正方行列 A の第 i 行と第 j 行を入れ替えた行列とすると、

$$\det(B) = -\det(A)$$

である。

(10) B を、正方行列 A の第 i 行に第 j 行 $(i \neq j)$ の s 倍を加えた行列とすると、

$$\det(B) = \det(A)$$

である。

注 3. $A + A = 2A$ は、A の各行を 2 倍とした行列であるため、(8) より、

$$\det(A + A) = \det(2A) = 2^n \det(A)$$

が分かる。よって、一般的に、

$$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$$

である。

任意の $i < j$ に対して、$b_{ij} = 0$ であるような正方行列 B は、上三角行列と呼ばれる。${}^tB$ は上三角行列であるような正方行列 B は、下三角行列と呼ばれる。帰納法を用い、次の公式が、性質 (7) から成り立つ。

(11) 任意の三角行列 B に対して、

$$\det(B) = b_{11} b_{22} \dots b_{nn}$$

である。

例 4. 性質 (8)–(11) を用いて、行列式を計算してみる。

(1)
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{①と③を入れ替えた}$$
$$= -3 \cdot (-5) \cdot 4 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

(2)
$$\begin{vmatrix} 2 & 16 & 3 \\ 4 & 8 & -6 \\ 8 & 8 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 16 & 3 \\ 0 & -24 & -12 \\ 0 & -56 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ ② + ① \times (-2) \\ ③ + ① \times (-4) \end{matrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 2 & 16 & 3 \\ 0 & -24 & -12 \\ 0 & 0 & 28 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ ③ + ② \times (-\frac{7}{3}) \end{matrix}$$
$$= 2 \cdot (-24) \cdot 28 = -2^6 \cdot 3 \cdot 7 = -1344$$

(3)
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ ② + ① \times (-1) \\ ③ + ① \times (-1) \\ ④ + ① \\ ⑤ + ① \times (-1) \end{matrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ ⑤ + ③ \times (-1) \end{matrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ ⑤ + ④ \times (-1) \end{matrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \quad ⑤ + ② \times (-1)
$$

$$
= - \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \quad \text{② と ③ を入れ替え}
$$

$$
= -1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (-2) = 2^4 = 16.
$$

注 5. 系 2 その (6) より、その (8)–(10) と以下の (8')–(10') は同値である。

(8') 行列 C は、行列 A の第 j 列を s 倍した行列とすると、

$$
\det(C) = s \det(A)
$$

である。

(9') 行列 C は、行列 A の第 j 列と第 k 列を入れ替えた行列とすると、

$$
\det(C) = -\det(A)
$$

である。

(10') 行列 C は、行列 A の第 j 列に第 k 列（$j \neq k$）の s 倍を加えた行列とすると、

$$
\det(C) = \det(A)
$$

である。

例 6. 性質 (8)–(10) と (8')–(10')、(11) を用いて、以下の行列式を計算してみる。

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 13 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 1 & 2 & 2 \\ 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{第 1 行と第 5 行を入れ替えた}$$

$$= + \begin{vmatrix} 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 13 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{第 2 行と第 4 行を入れ替えた}$$

$$= - \begin{vmatrix} 8 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 13 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{第 2 列と第 4 列を入れ替えた}$$

$$= -8 \cdot 2 \cdot (-2) \cdot 2 \cdot 3$$

$$= 2^6 \cdot 3 = 192$$

行列式について、次の主な定理を示す。

定理 7. n 次の正方行列 A に対して、次の性質 (i)–(ii) は同値である。

(i) $\mathrm{rank}(A) = n$

(ii) $\det(A) \neq 0$

証明. A を簡約化した行列を B とする。系 2 その (8)–(10) より、$\det(A) \neq 0$ と $\det(B) \neq 0$ は同値である。B は三角行列であるため、(11) より、$\det(B) \neq 0$ と $B = E_n$ は同値である。また、階数の定義より、$B = E_n$ と $\mathrm{rank}(A) = n$ は同値であるため、定理が成り立つ。 □

定理 8 (クラーメルの公式). n 次の正則行列

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

において、連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は、次のように与えられる。

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad x_i = \frac{\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{i-1} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}_{i+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{i-1} & \boldsymbol{a}_i & \boldsymbol{a}_{i+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}}$$

証明. $\boldsymbol{x}$ が連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解であることと列ベクトル $\boldsymbol{b}$ が次の 1 次結合で表されることは同値である。

$$\boldsymbol{b} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$$

従って、性質 (1')–(2') より、

$$\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{i-1} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}_{i+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} x_j \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{i-1} & \boldsymbol{a}_j & \boldsymbol{a}_{i+1} & \cdots \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

を得る。さらに、性質 (3') より、$j = i$ 以外の項が消えているため、

$$\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{i-1} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}_{i+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} = x_i \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{i-1} & \boldsymbol{a}_i & \boldsymbol{a}_{i+1} & \cdots \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

が成り立つ。 □

例 9. クレーメルの公式を用いて、次の連立 1 次方程式を問いでみる。

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

まず、(8)–(11) より、

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 3 = 9$$

を得る。同様に、次の行列式を計算する。

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 7 = 7$$

$$\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix} = 1\cdot 1\cdot 5 = 9$$

$$\det\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = 1\cdot 3\cdot 3 = 9$$

よって、クレーメルの公式より、

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7/9\\ 5/9\\ 1/3\end{pmatrix}$$

が分かる。しかし、掃き出し法の方が楽である。