

## 8 ベクトル空間

まず、**実数体**とは、実数のなす集合  $\mathbb{R}$  と加法  $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 、乗法  $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  で定義された写像からなる三組  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  である。以下、加法と乗法を満たす性質を思い出す。

(A1) 任意の  $a, b, c \in \mathbb{R}$  に対して、 $(a + b) + c = a + (b + c)$  である。

(A2) 任意の  $a \in \mathbb{R}$  に対して、 $a + 0 = a = 0 + a$  を満たす元  $0 \in \mathbb{R}$  が存在する。

(A3) 任意の  $a \in \mathbb{R}$  に対して、 $a + b = 0 = b + a$  を満たす元  $b \in \mathbb{R}$  が存在する。

(A4) 任意の  $a, b \in \mathbb{R}$  に対して、 $a + b = b + a$  である。

(P1) 任意の  $a, b, c \in \mathbb{R}$  に対して、 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$  である。

(P2) 任意の  $a \in \mathbb{R}$  に対して、 $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$  を満たす  $0$  でない元  $1 \in \mathbb{R}$  が存在する。

(P3) 任意の  $0$  でない  $a \in \mathbb{R}$  に対して、 $a \cdot b = 1 = b \cdot a$  を満たす元  $b \in \mathbb{R}$  が存在する。

(P4) 任意の  $a, b \in \mathbb{R}$  に対して、 $a \cdot b = b \cdot a$  である。

(D) 任意の  $a, b, c \in \mathbb{R}$  に対して、 $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$  と  $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$  である。

**注 1.** 一般的に、集合  $K$  と以上の公理 (A1)–(A4)、(P1)–(P4)、(D) を満たす写像

$$+: K \times K \rightarrow K, \quad \cdot: K \times K \rightarrow K$$

からなる三組  $(K, +, \cdot)$  は、**体 (field)** と呼ばれる。例として、集合  $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$  と次のように定義された写像  $+: \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2$ 、 $\cdot: \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2$  からなる三組  $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$  も体である。

$$\begin{array}{cccc} 0 + 0 = 0 & 0 + 1 = 1 & 1 + 0 = 1 & 1 + 1 = 0 \\ 0 \cdot 0 = 0 & 0 \cdot 1 = 0 & 1 \cdot 0 = 0 & 1 \cdot 1 = 1 \end{array}$$

この体は、位数 2 の**有限体**とよばれ、数学や情報理論での大切なものである。

**定義 2.** ベクトル空間とは、集合  $V$  と次の公理 (A1)–(A4) と (M1)–(M4) を満たす写像

$$+ : V \times V \rightarrow V, \quad \cdot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$$

からなる三組  $(V, +, \cdot)$  である。

(A1) 任意の  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  に対して、 $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$  である。

(A2) 任意の  $\mathbf{u} \in V$  に対して、 $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u} = \mathbf{0} + \mathbf{u}$  を満たす元  $\mathbf{0} \in V$  が存在する。

(A3) 任意の  $\mathbf{u} \in V$  に対して、 $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$  を満たす元  $\mathbf{v} \in V$  が存在する。

(A4) 任意の  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  に対して、 $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$  である。

(M1) 任意の  $a, b \in \mathbb{R}$ 、 $\mathbf{u} \in V$  に対して、 $(a \cdot b) \cdot \mathbf{u} = a \cdot (b \cdot \mathbf{u})$  である。

(M2) 任意の  $a \in \mathbb{R}$ 、 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  に対して、 $a \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (a \cdot \mathbf{u}) + (a \cdot \mathbf{v})$  である。

(M3) 任意の  $a, b \in \mathbb{R}$ 、 $\mathbf{u} \in V$  に対して、 $(a + b) \cdot \mathbf{u} = (a \cdot \mathbf{u}) + (b \cdot \mathbf{u})$  である。

(M4) 任意の  $\mathbf{u} \in V$  に対して、 $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$  である。

**注 3.** ベクトル空間  $(V, +, \cdot)$  について、次の用語を用いることが多い。

- (i) 集合  $V$  の元は、ベクトルと呼ばれ、太字  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \dots$  で書かれている。
- (ii) 集合  $\mathbb{R}$  の元は、スカラーと呼ばれ、小文字  $a, b, c, \dots$  で書かれている。
- (iii) ベクトル  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  に対して、 $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$  は、 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  のベクトル和と呼ばれる。
- (iv) スカラー  $a \in \mathbb{R}$  とベクトル  $\mathbf{u} \in V$  に対して、ベクトル  $a \cdot \mathbf{u} \in V$  は、 $\mathbf{u}$  の  $a$  倍と呼ばれ、単に  $a\mathbf{u}$  とも書かれている。
- (v) 任意の  $\mathbf{u} \in V$  に対して  $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u} = \mathbf{0} + \mathbf{u}$  を満たすベクトル  $\mathbf{0} \in V$  は、零ベクトルと呼ばれる。
- (vi) ベクトル  $\mathbf{u} \in V$  に対して、 $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$  を満たすベクトル  $\mathbf{v} \in V$  は、ベクトル  $\mathbf{u}$  の逆ベクトルと呼ばれ、 $-\mathbf{u}$  と書かれる。

(vii)  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  のベクトル差は、 $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$  で定義される。特に、任意のベクトル  $\mathbf{u} \in V$  に対して、 $\mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{0}$  である。

補題 4.  $(V, +, \cdot)$  をベクトル空間とする。

- (1) 零ベクトルについては、ただ一つが存在する。
- (2) 任意の  $\mathbf{u} \in V$  に対して、逆ベクトルは、ただ一つが存在する。
- (3) 任意の  $\mathbf{u} \in V$  に対して、 $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$  である。
- (4) 任意の  $\mathbf{u} \in V$  に対して、 $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$  である。

証明. (1)  $\mathbf{0}, \mathbf{0}' \in V$  は、両方公理 (A2) を満たすとき、 $\mathbf{0} = \mathbf{0}'$  であることを示せばよい。今、 $\mathbf{0}$  は公理 (A2) を満たすため、 $\mathbf{0}' = \mathbf{0}' + \mathbf{0}$  が分かる。同様に、 $\mathbf{0}'$  は公理 (A2) を満たすため、 $\mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0}$  が分かる。すなわち、

$$\mathbf{0}' = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}$$

を示した。

(2)  $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$  は、両方与えられた  $\mathbf{u} \in V$  の逆ベクトルであることを仮定する。そのとき、

$$\mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v} + (\mathbf{u} + \mathbf{v}') = (\mathbf{v} + \mathbf{u}) + \mathbf{v}' = \mathbf{0} + \mathbf{v}' = \mathbf{v}'$$

が成り立つため、 $\mathbf{u}$  の逆ベクトルの一意性を示した。

(3)  $\mathbf{u} \in V$  において、

$$0\mathbf{u} = (0 + 0)\mathbf{u} = 0\mathbf{u} + 0\mathbf{u}$$

であるため、 $\mathbf{0} = 0\mathbf{u}$  が分かる。

(4) 逆ベクトルの一意性より、 $\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = \mathbf{0}$  を示せば良い。今、

$$\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = 1\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = (1 + (-1))\mathbf{u} = 0\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

であるため、補題を示した。 □

例 5.  $n$  次のユークリッド空間とは、次のように定義されたベクトル空間  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$  である。  
ここで、 $\mathbb{R}^n$  は、 $n$  次の列ベクトル

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

のなす集合で、ベクトル和  $+: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  とスカラー積  $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  は、次の公式で定義された写像である。

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}, \quad a \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au_1 \\ au_2 \\ \vdots \\ au_n \end{pmatrix}$$

例 6. 次のように、ベクトル空間  $(V, +, \cdot)$  を定める。 $V$  を、任意の関数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  からなる集合とし、ベクトル和とスカラー積を、それぞれの公式  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$  と  $(af)(x) = af(x)$  で定める。このベクトル空間の零ベクトルは、定関数  $f(x) = 0$  である。

命題 7.  $(V, +, \cdot)$  を、ベクトル空間とし、 $W \subset V$  を、以下の性質 (i)–(iii) を満たす部分集合とする。このとき、 $(W, +, \cdot)$  は、ベクトル空間である。

(i)  $\mathbf{0} \in W$

(ii) 任意の  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$  に対して、 $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$  である。

(iii) 任意の  $a \in \mathbb{R}$ 、 $\mathbf{u} \in W$  に対して、 $a\mathbf{u} \in W$  である。

証明. それぞれの性質 (ii) と (iii) により、 $+: W \times W \rightarrow W$  と  $\cdot: \mathbb{R} \times W \rightarrow W$  は、うまく定義された写像である。以下、公理 (A1)–(A4)、(M1)–(M4)、(D) が満たされていることを示す。まず、 $(V, +, \cdot)$  が (A1)–(A4)、(M1)–(M4)、(D) を満たすため、 $(W, +, \cdot)$  も (A1)、(A4)、(M1)–(M4)、(D) を満たすことが直ちに分かる。さらに、性質 (i) より、 $V$  の零ベクトル  $\mathbf{0}$  が  $W$  に含まれているため、 $(W, +, \cdot)$  が (A2) を満たすことが成り立つ。最後に、 $(V, +, \cdot)$  が (A3) を満たすため、任意の  $\mathbf{u} \in W$  に対して、 $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$  を満たす  $\mathbf{v} \in V$  が存在することが分かる。しかし、補題 4 その (4) より、 $\mathbf{v} = (-1)\mathbf{u}$  が分かるため、性質 (iii) より、 $\mathbf{v} \in W$  を得る。よって、 $(W, +, \cdot)$  が (A3) を満たすことを示した。□

**定義 8.** ベクトル空間  $(V, +, \cdot)$  において、以上の性質 (i)–(iii) を満たす部分集合  $W \subset V$  からなるようなベクトル空間  $(W, +, \cdot)$  は、 $(V, +, \cdot)$  の **部分空間** とよばれる。

**命題 9.**  $m \times n$  行列  $A$  に対して、 $W \subset \mathbb{R}^n$  を、解集合

$$W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^n$$

とする。このとき、 $(W, +, \cdot)$  は、ユークリッド空間  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$  の部分空間である。

**証明.**  $W \subset \mathbb{R}^n$  が命題 7 の性質 (i)–(iii) を満たすことを示せばよい。 $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$  ため、(i) が成り立つ。任意の  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$  に対して、 $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$  ため、(ii) を得る。任意の  $a \in \mathbb{R}$ 、 $\mathbf{u} \in W$  に対して、 $A(a\mathbf{u}) = aA\mathbf{u} = a\mathbf{0} = \mathbf{0}$  なので、(iii) が成り立つ。よって、命題 7 より、 $(W, +, \cdot)$  は、 $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$  の部分空間であることが分かる。  $\square$

**定義 10.**  $m \times n$  行列  $A$  において、解集合

$$W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^n$$

からなる部分空間  $(W, +, \cdot) \subset (\mathbb{R}^n, +, \cdot)$  は、 $A$  の **カーネル** (kernel) と呼ばれ、 $\ker(A)$  と書かれる。

**例 11.** (1) 次の部分集合  $W \subset \mathbb{R}^2$  について、 $(W, +, \cdot)$  は  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  の部分空間である。

$$W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 - 3x_2 = 0\}$$

ただし、 $(W, +, \cdot)$  は  $1 \times 2$  行列  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix}$  のカーネルである。

(2) 次の部分集合  $Z \subset \mathbb{R}^2$  は、ユークリッド空間  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  の部分空間ではない。

$$Z = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 - 3x_2 = 1\}$$

なぜなら、 $Z$  は、零ベクトル  $\mathbf{0}$  を含まない。