

9 1 次結合と 1 次独立

これから、ベクトル空間 $(V, +, \cdot)$ を単に V と書く。

定義 1. ベクトル空間 V のベクトル $\mathbf{v}$ が V の有限個のベクトル $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ を用いて

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + c_n \mathbf{u}_n \quad (c_i \in \mathbb{R})$$

と書かれるとき、ベクトル $\mathbf{v}$ は $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ の **1 次結合** で書かれるという。

注 2. 0 個のベクトルの 1 次結合は、ゼロベクトル $\mathbf{0}$ となることを定義する。

例 3. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ のベクトル

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

に対して、任意の $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ は、 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ の 1 次結合で表される。なぜなら、

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (-v_1 + v_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-2v_1 + v_2) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-v_1 + v_2) \mathbf{u}_1 + (-2v_1 + v_2) \mathbf{u}_2$$

である。

次に、ベクトル空間 V の部分集合 $S \subset V$ を考える。

命題 4. ベクトル空間 V とその部分集合 $S \subset V$ に対して、 S に含まれているベクトルの 1 次結合からなる部分集合

$$W = \{c_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + c_n \mathbf{u}_n \mid n \geq 0; \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in S; c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}\} \subset V$$

は、 V の部分空間である。

証明. W は、授業 8 の命題 7 の性質 (i)—(iii) を満たすことを示せばよい。まず、 W はゼロベクトル $\mathbf{0}$ を含むため、性質 (i) が成り立つ。それで、任意の W に含まれている

$$\mathbf{u} = c_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + c_m \mathbf{u}_m \quad (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m \in S; c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R})$$

$$\mathbf{v} = d_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + d_n \mathbf{v}_n \quad (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in S; d_1, \dots, d_n \in \mathbb{R})$$

に対して、

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = c_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + c_m \mathbf{u}_m + d_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + d_n \mathbf{v}_n$$

も W に含まれているため、性質 (ii) が成り立つ。最後に、

$$\mathbf{u} = c_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + c_m \mathbf{u}_m \quad (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m \in S; c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R})$$

が W に含まれているとき、そのスカラー a 倍

$$a\mathbf{u} = ac_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + ac_m \mathbf{u}_m$$

も W に含まれているため、性質 (iii) が成り立つ。授業 8 の命題 7 より、 $W \subset V$ は部分空間であることが成り立つ。 $\square$

定義 5. ベクトル空間 V とその部分集合 $S \subset V$ において、部分空間

$$W = \{c_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + c_n \mathbf{u}_n \mid n \geq 0; \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in S; c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}\} \subset V$$

は、 S で生成された部分空間と呼ばれる。

例 6. 例 3 に於けるベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^2$ のなす部分集合 $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \subset \mathbb{R}^2$ は、全空間 $W = \mathbb{R}^2$ を生成する。

定義 7. V をベクトル空間とする。

(1) 次の性質を満たす部分集合 $S \subset V$ は、**1 次独立** であると呼ばれる。

「任意の $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \in S$ と $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ に対して、

$$c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + c_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

なら、必ず $c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_n = 0$ である。」

(2) 1 次独立でない部分集合 $S \subset V$ は、**1 次従属** であると呼ばれる。

例 8. (1) 空集合 $\emptyset \subset V$ は 1 次独立である。

(2) ゼロベクトルからなる部分集合 $\{\mathbf{0}\} \subset V$ は 1 次従属である。なぜなら、 $1 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ なのに、 $1 \neq 0$ ではない。

(3) ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の基本ベクトル

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

のなす部分集合 $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ は 1 次独立である。なぜなら、

$$c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + c_n \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

はゼロベクトルなら、必ず $c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_n = 0$ である。

(4) 例 3 に於けるベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ からなる部分集合 $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \subset \mathbb{R}^2$ は 1 次独立である。なぜなら、方程式 $c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$ と連立 1 次方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

は同値であるため、 $c_1 = 0, c_2 = 0$ であることが分かる。

命題 9. V をベクトル空間、 $S = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\} \subset V$ を k 個のベクトルからなる 1 次独立である部分集合、 $W \subset V$ を h 個のベクトルからなる部分集合 $T = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_h\} \subset V$ で生成された部分空間とする。このとき、 $S \subset W$ なら、必ず $k \leq h$ である。

証明. 帰納法を用いて示す。まず、 $h = 0$ のとき、 $W = \{\mathbf{0}\} \subset V$ ため、例 8 その (2) より、 $k = 0$ が分かる。よって、 $h = r - 1$ のときを正しいと仮定し、 $h = r$ のときを示せばよい。定義 5 より、部分集合 $S \subset W$ ため、 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ が、次のように表される。

$$\mathbf{u}_1 = a_{11} \mathbf{v}_1 + a_{12} \mathbf{v}_2 + \cdots + a_{1r} \mathbf{v}_r$$

$$\mathbf{u}_2 = a_{21} \mathbf{v}_1 + a_{22} \mathbf{v}_2 + \cdots + a_{2r} \mathbf{v}_r$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{u}_k = a_{k1} \mathbf{v}_1 + a_{k2} \mathbf{v}_2 + \cdots + a_{kr} \mathbf{v}_r$$

まず、 $a_{1r} = 0, a_{2r} = 0, \dots, a_{kr} = 0$ のとき、 S は部分集合 $T' = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{r-1}\} \subset V$ で生成された部分空間 $W' \subset V$ に含まれているため、帰納法の仮定より、 $k \leq r-1$ が分かる。特に、このとき $k \leq r$ である。次に、 $a_{1r} \neq 0$ のとき、次のように定める $k-1$ 個のベクトル $\mathbf{u}'_2, \dots, \mathbf{u}'_k$ からなる部分集合 $S' \subset V$ は、以上の部分空間 $W' \subset V$ に含まれている。

$$\begin{aligned}\mathbf{u}'_2 &= \mathbf{u}_2 - \frac{a_{2r}}{a_{1r}}\mathbf{u}_1 \\ &\vdots \\ \mathbf{u}'_k &= \mathbf{u}_k - \frac{a_{kr}}{a_{1r}}\mathbf{u}_1\end{aligned}$$

さらに、 S' は 1 次独立であるため、帰納法の仮定より、 $k-1 \leq r-1$ が分かる。すなわち、このときも $k \leq r$ である。

以下、 $S' \subset V$ は 1 次独立であることを示す。連立 1 次方程式

$$c_2\mathbf{u}'_2 + \dots + c_k\mathbf{u}'_k = \mathbf{0}$$

と連立 1 次方程式

$$\frac{-1}{a_{1r}}(c_2a_{2r} + \dots + c_ka_{kr})\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \dots + c_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$$

は同値である。さらに、 $S = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\} \subset V$ は 1 次独立であるため、 $c_2 = 0, \dots, c_k = 0$ が分かる。よって、 $S' = \{\mathbf{u}'_2, \dots, \mathbf{u}'_k\} \subset V$ は 1 次独立であることを得る。

最後に、 $a_{1r}, a_{2r}, \dots, a_{kr}$ のいずれかは、ゼロでないとき、同様に $k \leq r$ が示される。これで、命題が成り立つ。 $\square$

例 10. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ は、2 個のベクトルからなる部分集合で生成されるため、命題 9 より、3 個以上のベクトルからなる部分集合 $S \subset \mathbb{R}^2$ は、必ず 1 次従属であることが分かる。