# 数学通論 II・中間試験（解答）

問題 1 (20 点). 次の各問いに答えよ。

(1) 平面内の原点 $O$ を中心とし、反時計まわりに $\pi/2$ 回転させる線形写像 $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を、次の形で表せ。

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(2) 平面内の直線 $y = -x$ に関して対称な点を対応させる線形写像 $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を、次の形で表せ。

$$G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(3) 合成写像 $F \circ G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を、次の形で表せ。

$$(F \circ G)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

解答 1. (1) $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; (2) $G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(3) $(F \circ G)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

問題 2 (20 点). 次の連立 1 次方程式を掃き出し法（拡大係数行列の基本変形）によって解け。ただし、解答にはどのような基本変形を行ったかを明記すること。

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 5 \\ \phantom{-x_1 +{}} 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$$

解答 2. 連立 1 次方程式の拡大係数行列 $(A \mid \mathbf{b})$ を簡約化した行列 $(B \mid \mathbf{c})$ は、

$$(B \mid \mathbf{c}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

ため、連立 1 次方程式の解は、次のように表される。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

問題 3 (20 点). 任意の実数 $a$ に対して、$A$ を以下の行列とする。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & a \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix}$$

このとき、次の各問いに答えよ。

(1) $A$ を簡約化した行列 $B$ を求めよ。ただし、解答にはどのような基本変形を行ったかを明記すること。

(2) $A$ の階数 $\mathrm{rank}(A)$ を求めよ。

解答 3. (1) $a \neq 1$ かつ $a \neq 3$ のとき、$B = E_3$ は単位行列で、$a = 1$ または $a = 3$ のとき、

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (a = 1) \quad \text{または} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (a = 3)$$

である。

(2) $a \neq 1$ かつ $a \neq 3$ のとき、$\mathrm{rank}(A) = 3$ で、$a = 1$ または $a = 3$ のとき、$\mathrm{rank}(A) = 2$ である。

問題 4 (20 点). 次の行列 $A$ の逆行列 $A^{-1}$ を求めよ。ただし、掃き出し法を用いる場合は、解答にどのような基本変形を行ったかを明記すること。

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

解答 4.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -17 & 11 \\ 2 & -8 & 5 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

問題 5 (20 点). 次の行列 $A$ と $B$ に対して、行列式を計算せよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

解答 5.

$$\begin{aligned} \det(A) &= -1 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \\ &= -1 \cdot (-18) - 2 \cdot 6 \\ &= 18 - 12 \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(B) &= +2 \cdot \det \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= +2 \cdot (+1 \cdot \det \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}) \\ &= +2 \cdot (+1 \cdot (9 - 6)) \\ &= 6 \end{aligned}$$