# 練習問題その１１ (解答)

問題 1. $F^{-1}\colon V \to U$ は、次の性質 (1)–(2) を満たすことを示せばよい。

(1) 任意の $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ に対して、$F^{-1}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = F^{-1}(\mathbf{v}_1) + F^{-1}(\mathbf{v}_2)$ である。

(2) 任意の $c \in \mathbb{R}, \mathbf{v} \in V$ に対して、$F^{-1}(c\mathbf{v}) = cF^{-1}(\mathbf{v})$ である。

これらは、$F^{-1}\colon V \to U$ の定義より、次の等式からなる。

$$F(F^{-1}(\mathbf{v}_1) + F^{-1}(\mathbf{v}_2)) \overset{(a)}{=} F(F^{-1}(\mathbf{v}_1)) + F(F^{-1}(\mathbf{v}_2)) \overset{(b)}{=} \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$
$$F(cF^{-1}(\mathbf{v})) \overset{(a)}{=} cF(F^{-1}(\mathbf{v})) \overset{(b)}{=} c\mathbf{v}$$

ここで、(a) は $F\colon U \to V$ の線形性により、(b) は $F^{-1}\colon V \to U$ の定義による。

問題 2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

問題 3. 恒等写像 $\mathrm{id}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の基底 $R \subset \mathbb{R}^2$ と $S \subset \mathbb{R}^2$ に関する表現行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

は、次の方程式で決定される。

$$\mathrm{id}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 = a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2$$
$$\mathrm{id}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2 = a_{12}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2$$

よって、

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

が成り立つ。

問題 4. $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ の基底 $R$ と $S$ に関する表現行列 $A$ は、次の方程式で決定される。

$$F(\mathbf{u}_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$
$$F(\mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix} 12 \\ 17 \end{pmatrix} = a_{12}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$
$$F(\mathbf{u}_3) = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = a_{13}\mathbf{v}_1 + a_{23}\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$$

以上の連立 1 次方程式を解くと、

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

を得る。