練習問題その１２ (解答)

問題 1. (i) A を簡約した行列 B を計算すると、

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を得る。よって、

$$\mathrm{rank}(F) = \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B) = 2$$
$$\mathrm{null}(F) = \dim(\mathbb{R}^4) - \mathrm{rank}(F) = 4 - 2 = 2$$

が分かる。

(ii) A の、B の主成分を含む列ベクトルと対応する列ベクトルのなす部分集合

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{im}(F)$$

は、基底である。B と対応する連立 1 次方程式

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & & & - & x_4 & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

の解は、次のように表される。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって、

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \ker(F)$$

は、基底である。

問題 2. (i) A を簡約した行列 B を計算すると、

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を得る。よって、

$$\mathrm{rank}(F) = \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B) = 3$$

$$\mathrm{null}(F) = \dim(\mathbb{R}^5) - \mathrm{rank}(F) = 5 - 3 = 2$$

が分かる。

(ii) A の、B の主成分を含む列ベクトルと対応する列ベクトルのなす部分集合

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{im}(F)$$

は、基底である。B と対応する連立 1 次方程式

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & & & + & 3x_3 & + & 2x_4 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 0 \\ & & & & & & & & x_5 & = & 0 \\ & & & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

の解は、次のように表される。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって、

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \ker(F)$$

は、基底である。

問題 3. 「(iii) ならば、(i) かつ (ii)」は自明なので、「(i) ならば (ii)」と「(ii) ならば (i)」を示せばよい。

まず、「(i) ならば (ii)」を示す。F は単射なので、$\ker(F) = \{\mathbf{0}\}$、$\mathrm{null}(F) = 0$ であることが分かる。定理８より、

$$\mathrm{rank}(F) = \dim(\mathbb{R}^n) - \mathrm{null}(F) = n - 0 = n$$

ため、授業１２の命題１２より、$\mathrm{im}(F) = \mathbb{R}^n$ が分かる。なぜなら、$\mathrm{im}(F) \subset \mathbb{R}^n$ は部分空間で、$\dim(\mathrm{im}(F)) = \dim(\mathbb{R}^n)$ である。ゆえに、F は、全射である。

次に、「(ii) ならば (i)」を示す。F は全射なので、$\mathrm{im}(F) = \mathbb{R}^n$ であるため, $\mathrm{rank}(F) = n$ が分かる。よって、定理８より、

$$\mathrm{null}(F) = \dim(\mathbb{R}^n) - \mathrm{rank}(F) = n - n = 0$$

を得る。すなわち、$\ker(F) = \{\mathbf{0}\}$ である。補題４より、F は単射であることが分かる。