

練習問題その5 (解答)

問題 1. 掃き出し法を用いて、(1) を具体的に解く。

$$\begin{aligned}
 (A \mid E_3) &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \mid & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & \mid & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \mid & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & \mid & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & \mid & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & \mid & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \textcircled{1} + \textcircled{3} \times (-2) \\ \textcircled{2} + \textcircled{3} \times (-2) \end{array} \\
 &\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \mid & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \mid & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & \mid & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textcircled{1} + \textcircled{2} \times (-1) \\
 &\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \mid & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \mid & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & \mid & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \textcircled{2} + \textcircled{1} \times (-1) \\ \textcircled{3} + \textcircled{1} \end{array} \\
 &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \mid & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \mid & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \mid & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{3} \\
 (E_3 \mid A^{-1}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \mid & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \mid & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \mid & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \textcircled{2} \times (-1)
 \end{aligned}$$

同様に、(2)–(5) を解くと、次の結果がでる。

$$\begin{aligned}
 (2) \quad &\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -4 & -3 & -3 \end{pmatrix} & (3) \quad &\begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & 1 \\ -1 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \\
 (4) \quad &\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & (5) \quad &\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

問題 2. 逆行列を、掃き出し法を用いて計算する。

$$(1) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b + 2c \\ -a + b - c \\ 2a - 3b + 7c \end{pmatrix}$$

問題 3. (1) $A^{-1}A = E = A^{-1}A$ ため、 A^{-1} が可逆で、 $(A^{-1})^{-1} = A$ が分かる。

(2) $AA^{-1} = E = A^{-1}A$ ため、 ${}^t(A^{-1}) \cdot {}^tA = E = {}^tA \cdot {}^t(A^{-1})$ が分かる。よって、 tA が可逆で、 $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ を示した。

(3) $AA^{-1} = E = A^{-1}A$ と $BB^{-1} = E = B^{-1}B$ ため、

$$ABB^{-1}A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E = B^{-1}B = B^{-1}EB = B^{-1}A^{-1}AB$$

が分かる。よって、 AB が可逆で、 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ を示した。

問題 4. $E - A$ が可逆で、 $(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{m-1}$ である。なぜなら、

$$\begin{aligned} (E - A)(E + A + \cdots + A^{m-1}) &= E + A + \cdots + A^{m-1} - (A + A^2 + \cdots + A^m) \\ &= E - A^m = E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (E + A + \cdots + A^{m-1})(E - A) &= E + A + \cdots + A^{m-1} - (A + A^2 + \cdots + A^m) \\ &= E - A^m = E \end{aligned}$$

である。