

練習問題その 1 1

問題 1. $F: U \rightarrow V$ を線形写像とする。 F は全単射のとき、 $F^{-1}: V \rightarrow U$ も線形写像であることを示せ。ただし、 $F^{-1}: V \rightarrow U$ は、「 $F^{-1}(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \Leftrightarrow F(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$ 」で定める写像である。

問題 2. 例 7 に於けるベクトル空間 U とその基底 $R \subset U$ を思い出す。以下のように定める線形写像 $G, H: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ の基底 $R \subset U$ と基本基底 $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \subset \mathbb{R}^2$ に関する表現行列 B, C を求めよ。

$$G \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \quad H \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$$

問題 3. 恒等写像 $\text{id}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ の次のように定める基底 $R \subset \mathbb{R}^2$ と $S \subset \mathbb{R}^2$ に関する表現行列 A を求めよ。ただし、恒等写像とは、 $\text{id}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ で定める写像である。

$$R = \left\{ \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad S = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

問題 4. 次の線形写像 $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ と基底 $R \subset \mathbb{R}^3, S \subset \mathbb{R}^2$ を考えてみる。

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 4y + z \\ x + 5y + 3z \end{pmatrix}$$

$$R = \left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad S = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

このとき、 $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ の基底 R と S に関する表現行列 A を求めよ。