練習問題その８

問題 1. 次の部分集合 $W_1, W_2, W_3 \subset \mathbb{R}^3$ について、$(W_1, +, \cdot\ ), (W_2, +, \cdot\ ), (W_3, +, \cdot\ )$ は、$(\mathbb{R}^3, +, \cdot\ )$ の部分空間であるかどうかを調べよ。

$$W_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$$
$$W_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 + 2x_2 - x_3 \neq 0\}$$
$$W_3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 + 2x_2 - x_3 \geqslant 0\}$$

問題 2. 命題 7 では、性質 (i) が、性質 (iii) と次の性質 (i') からなることを示せ。

(i') W は空集合でない。

問題 3. 次の部分集合 $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$ について、$(W_1, +, \cdot\ )$、$(W_2, +, \cdot\ )$ は、$(\mathbb{R}^3, +, \cdot\ )$ の部分空間であることを示せ。

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 3t \\ 5t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}, \qquad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} s+t \\ 3s+2t \\ -s \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

(ヒント：命題 7 を使えばよい。)

問題 4. $(V, +, \cdot\ )$ を例 6 で定義された関数空間とし、$W \subset V$ を任意の微分可能である関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ からなる部分集合とする。ここで、$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が微分可能であるとは、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、導関数 $f'(x)$ が存在することである。$W \subset V$ は、命題 7 の性質 (i)—(iii) を満たすことを示せ。